



**DELHI UNIVERSITY
LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. 1362:2

168N36

Date of release for loan

Ac. No. 21629

This book should be returned on or before the date last stamped below.

An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.



نصرت علی صاحب دین

علم ہند سترو

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے

محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔ اے

۱۳۵۵ھ ۱۳۲۵ھ ۱۹۳۶ء

طبع مطبعہ اسلامیہ دارالافتاء دارالحدیث

فہرست مضامین

(علم ہندوستان کی)

صفحہ	مضمون
۱	پہلا باب - تہید
۶	دوسرا باب - نسبت و تناسب
۱۱	امثلہ ۱
۲۳	امثلہ ۲
۳۰	امثلہ ۳
۳۳	امثلہ ۴
۴۲	امثلہ ۵
۴۷	امثلہ ۶
۵۰	امثلہ ۷
۵۱	تیسرا باب - مثلث کے خواص
۵۵	امثلہ ۸
۵۷	امثلہ ۹

صفحہ	مضمون
۶۲	امشہ ۱۱
۶۶	امشہ ۱۱
۷۳	امشہ ۱۲
۷۶	چوتھا باب - دائروں کے خواص
۷۷	امشہ ۱۳
۸۰	امشہ ۱۴
۸۸	امشہ ۱۵
۹۵	امشہ ۱۶
۱۰۲	امشہ ۱۷
۱۰۳	پانچواں باب - دائروں کا بنانا۔
۱۰۵	امشہ ۱۸
۱۱۰	امشہ ۱۹
۱۱۳	چھٹا باب - اعظم اقل
۱۲۱	امشہ ۲۰
۱۲۳	ساتواں باب - چلیبی نسبت موسیقی صفا اور موسیقی نیسل
۱۲۵	امشہ ۲۱
۱۳۷	امشہ ۲۲

دیبچہ

علم ہندسہ مستوی

ہندسہ مستوی کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے تالیف کیا گیا ہے جہاں تاک ممکن تھا ہندسہ مستوی کے معینہ نصاب جدید کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس رسالہ کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے چند دفعات جو علامت * سے نشان زد کی گئی ہیں مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کے لیے نصاب سے زائد درج کی گئی ہیں مگر یہ دفعات ایسی ہیں کہ تقریباً جلد طلباء ان کو آسان اور دلچسپ پائینگے۔ مناسب مشقوں کے انتخاب کی غرض سے متعدد مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا گیا ہے۔ مسائل پر مکمل طور پر حاوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ طالب علم حتی الامکان مسائل کے متعلقہ امثلہ میں مشقوں کی کافی تعداد کو حل کرنے کی بطور خود پوری پوری کوشش کرے۔ طالب علم کی سہولت کے نظر جہاں ضروری تصور کیا گیا مشقوں کے اشارے یا مکمل حل درج کر دیے گئے ہیں۔ فقط

المرقوم یکم آبان ۱۳۳۵ھ

شیخ برکعیلی

محمد خواجہ محی الدین

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

علم ہندوستانی

پہلا باب

تہید

۱۔ اس باب میں بطور تہید ہم ایسے اہم مسائل پیش کرتے ہیں جن سے طالب علم کو اس کتاب کے شروع کرنے سے پہلے واقف ہونا ضروری ہے۔ یہ تمام مسائل ثبوت اور توضیحی مثالوں کے ساتھ بالعموم علم ہندوستان کی ان تمام درسی کتابوں میں پائے جاتے ہیں جو مدارس فوقانیہ میں استعمال ہوتی ہیں۔

۲۔ خطوط مستقیم۔

(۱) اگر ایک خط مستقیم ایک اور خط مستقیم سے ملے تو دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کریں تو متقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ایک قاطع دو خطوط کو کاٹے اور متبادل زاویے مساوی ہوں تو متوالہ ذکر دو خطوط متوازی ہونگے اور اس کا عکس۔

۳۔ مثلثات اور متوازی الاضلاع۔

- (۱) کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے مساوی ہوتا ہے۔
 (۲) دو مثلث ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر
 (ا) ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں
 کے جدا جدا مساوی ہوں اور ان ضلعوں سے بننے والے زاویے بھی مساوی ہوں
 (ب) اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے
 دو زاویوں کے جدا جدا برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث
 کے نظیر کے ضلع کے برابر ہو۔
 (ج) اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں
 کے جدا جدا برابر ہوں۔
 (۳) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے آپس میں مساوی ہوں تو اُن کے
 مقابل کے زاویے بھی مساوی ہونگے اور اس کا عکس۔
 (۴) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں میں ایک کا وتر اور ایک ضلع دوسرے
 کے وتر اور ایک ضلع کے بالترتیب مساوی ہوں تو مثلث ہر طرح سے مساوی
 ہونگے۔

- (۵) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خط مستقیم تک چھوٹے سے
 چھوٹا فاصلہ وہ عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ سے خط مذکور تک کھینچا جائے۔
 (۶) متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور نیز زاویے ایک
 دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تقصیف کرتے ہیں اور
 ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
 (۷) اگر تین (یا تین سے زیادہ) متوازی خط ایسے ہوں کہ اُن سے ایک
 قاطع کے منقطع مساوی ہوں تو کسی دوسرے قاطع کے منقطع بھی مساوی ہونگے۔

۴۔ رقبے۔

- (۱) مساوی قاعدوں اور مساوی ارتفاعوں والے متوازی الاضلاع
 (یا مثلث) رقبے کے لحاظ سے مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) کسی مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

۵۔ جبریہ ضابطے۔

$$(۱) ک (ل + ب + ج +) = ک ل + ک ب + ک ج + ...$$

$$(۲) (ل \pm ب) = ل' \pm ب' = ل' + ب'$$

$$(۳) (ل - ب) = ل' - ب' = (ل + ب) - (ل - ب)$$

$$(۴) (ل + ب)' = (ل - ب)' + ۲ (ل + ب)$$

$$(۵) (ل + ب)' - (ل - ب)' = ۴ ل ب$$

۶۔ دائرے۔

(۱) دائرہ کے مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملانے والا خط مستقیم وتر پر عمود ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) دو متقاطع دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط اُن کے مشترک وتر کا عمودی منصف ہوتا ہے۔

(۳) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک اور صرف ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

(۴) ایک ہی دائرہ میں یا مساوی دائروں میں مساوی قوسوں یا مساوی وتروں کے محاذی محیط (یا مرکز) پر مساوی زاویے بنتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۵) کسی دائرہ میں مساوی طول کے وتر مرکز سے مساوی انفصل ہوتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۶) دائرہ کا کوئی مماس اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

(۷) دائرہ کے کسی مماس اور اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے

کسی وتر کا درمیانی زاویہ متبادل قطعہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔
 (۸) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو دائروں کے مرکز اور نقطہ تماس ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔
 (۹) دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایک ذوار بقعہ الاصلع (چار ضلعی) کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دو قائے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔
 (۱۰) اگر ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ایک وتر کے حصوں کا حاصل ضرب دوسرے وتر کے حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۷۔ طریق

(۱) دو معلومہ نقطوں سے مساوی الفصل نقطوں کا طریق معلومہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی منصف ہوتا ہے۔
 (۲) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک دیے ہوئے خط سے ایک دیے ہوئے فاصلہ پر ہے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔
 (۳) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو دو متقاطع خطوط مستقیم سے مساوی فاصلوں پر رہتا ہے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کا جوڑا ہے۔
 (۴) ایک ایسے نقطہ کا طریق جس پر دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کے محاذی ایک دیا ہوا زاویہ بنتا ہے دائرہ کی ایک قوس ہے۔

۸۔ عملی مسئلے

(۱) ایک دیے ہوئے خط یا زاویہ کی تصفیہ کرنا۔
 (۲) ایک دیے ہوئے خط پر ایک نقطہ سے (جو دیے ہوئے خط پر یا اس کے باہر ہو) عمود کھینچنا۔
 (۳) دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا۔

- (۴) ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے ایک دیے ہوئے خط کے متوازی خط
کھینچنا۔
- (۵) ایک دیے ہوئے خط کو متعدد مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔
- (۶) مثلث کا بنانا جبکہ
- (۱) تین ضلعے معلوم ہوں۔
- (ب) دو ضلعے اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔
- (ج) ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔
- (۷) ایک دیے ہوئے کثیرالاضلاع کے مساوی رقبہ کا مربع بنانا۔
- (۸) ایک دیے ہوئے صحیح عدد کا جذر ہندسی طور پر معلوم کرنا۔
- (۹) ایک دائرہ کھینچنا جو
- (۱) ایک مثلث کے رأسوں میں سے گزرے۔
- (ب) ایک مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔
- (۱۰) ایک دیے ہوئے نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا۔
- (۱۱) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچنا۔
- (۱۲) دو دیے ہوئے دائروں کے مشترک (راست اور متقاطع)
مماس کھینچنا۔

دوسرا باب

نسبت و تناسب

۹۔ تعریفات اور ابتدائی اصول۔

ایک مقدار کو اُسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ جو ربط یا رشتہ ہو اُس کو ان مقداروں کی نسبت کہتے ہیں، جبکہ یہ رشتہ ان مقداروں کا اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھا جائے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنے گنا یا کونسا حصہ ہے۔ مثلاً اگر دو ہم جنس مقداروں میں بالترتیب ۱ اور ۲ اکائیاں ہوں تو پہلی مقدار کو دوسری مقدار کے ساتھ جو نسبت ہے وہ کسر $\frac{1}{2}$ یا علامت ۱:۲ سے تعبیر ہوتی ہے۔ پہلی مقدار ۱ کو نسبت کا مقدم اور دوسری مقدار ۲ کو مؤخر کہتے ہیں۔

دو مقداروں کی نسبت اس اکائی پر موقوف نہیں ہوتی جس کی رقوم میں ان مقداروں کو ناپا گیا ہے۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ جن مقداروں کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں۔ مثلاً دونوں طول ہوں یا دونوں زاویے ہوں یا دونوں رقبے ہوں۔ ظاہر ہے کہ ایک خط کے طول کا مقابلہ دوسری جنس کی کسی مقدار مثلاً کسی مثلث کے رقبے کے ساتھ نہیں کیا جاسکتا۔

نیز نسبت ایک عدد مجزؤ ہے جو صحیح یا کمزور ہو سکتا ہے مثلاً ۶ سمر اور ۸ سمر لمبے خطوط کے طولوں کی نسبت $\frac{6}{8}$ یا $\frac{3}{4}$ ہے نہ کہ $\frac{3}{8}$ سمر۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کو ایک مشترک اکائی (جسے وقت مشترک کہتے ہیں) کی رقوم میں پورا پورا ناپا جاسکے تو ان مقداروں کو متوافق مقادیر کہتے ہیں اور ان مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

ممکن ہے کہ دی ہوئی مقداروں میں کوئی وقت مشترک نہ ہو مثلاً اگر ایک مربع کا ضلع ۱ ہو تو اس کا وتر ۱.۴۱۴ ہوگا۔ ۱.۴۱۴ کی قیمت ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں نکالی جاسکتی۔ اگرچہ کہ یہ قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے ضلع اور وتر کے طول ایک ہی اکائی کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں ناپے جاسکتے۔

ایسی مقداروں کو جن میں کوئی وقت مشترک نہ ہو غیر متوافق یا متباہن مقادیر کہتے ہیں۔ دو غیر متوافق مقداروں کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک طور پر دو صحیح اعداد کی نسبت کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا لیکن ان کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر ۱.۴۱۴ کی تقریبی قیمت ۱.۴۱۴۱۴ لی جائے تو مربع کے ضلع اور وتر کی نسبت کی قیمت $\frac{14141}{10000}$ سے تعبیر ہوگی جہاں طول کی ایک چھوٹی اکائی ۱۰۰۰۰ کو بطور وقت مشترک لیا گیا ہے۔ مربع کے ضلع اور وتر کے طولوں کی نسبت کی اس سے بہتر تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر ۱.۴۱۴ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چار سے زیادہ مقاموں تک لی جائے۔

۱۰۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کی نسبت دوسری ہم جنس مقداروں کی نسبت کے مساوی ہو تو یہ چار مقادیر تناسب کہلاتی ہیں۔ یا یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ چار مقادیر تناسب میں ہیں مثلاً اگر $a : b = c : d$ تو 'ا' 'ب' 'ا' 'ب' تناسب کہلاتی ہیں۔

تعریف۔ 'ا' اور 'ب' کو طرفین تناسب اور 'ب' اور 'ا' کو

وسطین تناسب کہتے ہیں۔

نوٹ۔ کسی تناسب مثلاً $ا : ب = لا : ما$ میں ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی جنس کی ہونی چاہئیں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دونوں نسبتوں کی چاروں مقداریں ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ $ا$ اور $ب$ دونوں رقبے ہوں اور $لا$ اور $ما$ دونوں طول۔ اس صورت میں تناسب سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے طول کو دوسرے طول کے ساتھ ہے۔

۱۱۔ تعریفات۔ اگر چار مقداریں $ا، ب، ج، د$ ایسی ہوں کہ $ا : ب = ج : د$ تو $د$ کو $ا$ ب $ج$ کا چوتھا تناسب کہتے ہیں۔ اگر تین مقداریں $ا، ب، ج$ ایسی ہوں کہ $ا : ب = ب : ج$ تو $ج$ کو $ا$ اور $ب$ کا تیسرا تناسب کہتے ہیں اور $ب$ کو $ا$ اور $ج$ کا وسط تناسب یا ہندسی اوسط کہتے ہیں۔

۱۲۔ علوم متعارفہ۔

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر $ا : ب = لا : ما$ اور $ج : د = لا : ما$ تو ظاہر ہے کہ $ا : ب = ج : د$

(۲) اگر تین ہم جنس مقداریں $ا، ب، ج$ ایسی ہوں کہ $ا : ب = ب : ج$ تو ظاہر ہے کہ $ا = ب$

۱۳۔ تناسب کے ابتدائی مسائل۔

تناسب کے متعلق مندرجہ ذیل ابتدائی مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب میں پائے جا سکتے ہیں۔

$$(۱) \text{ اگر } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ تو}$$

$$(۱) \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د} \text{ (عکس نسبت)}$$

$$(۲) \quad \frac{ب}{د} = \frac{۱}{ج} \quad (\text{تبدیل نسبت})$$

$$(۳) \quad ۱ د = ب ج$$

$$(۴) \quad \frac{ب+د}{د} = \frac{۱+ج}{ج} \quad (\text{ترکیب نسبت})$$

$$(۵) \quad \frac{۱-ب}{ب} = \frac{ج-۱}{د} \quad (\text{تفصیل نسبت})$$

$$(۶) \quad \frac{۱+ب}{۱-ب} = \frac{ج+د}{ج-د} \quad (\text{ترکیب و تفصیل نسبت})$$

$$(ب) \quad \text{اگر } \frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = \dots = ک \quad \text{ک تو}$$

$$\frac{۱+ج+د+ف+\dots}{ب+د+ف+\dots} = ک$$

$$\frac{۱ م + ۲ م + ۳ م + ۴ م + \dots}{۱ م + ۲ م + ۳ م + ۴ م + \dots} = \text{جہاں } ۱ م، ۲ م، ۳ م، ۴ م، \dots \text{ کوئی عدد ہیں}$$

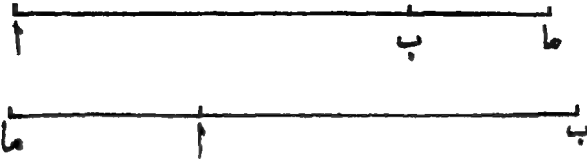
۱۴۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط مستقیم ا ب پر (۱ اور ب کے درمیان) ایک نقطہ لایا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ا ب کی داخلی تقسیم نقطہ لایا ہوئی ہے۔

ب ————— ا

ا لا اور لا ب خط ا ب کے دو حصے ہیں اور ان کے طولوں کی علامت ایک ہی ہے کیونکہ دونوں کی سمت وہی ہے اس لیے ا لا اور لا ب کی نسبت ایک مثبت مقدار ہوگی۔

اگر نقطہ ما، ا ب محدودہ پر (ا کی جانب یا ب کی جانب) لایا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ا ب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ہوئی ہے اس صورت میں ا ما اور ما ب کی سمتیں مختلف ہیں اور خط ا ب کے دو حصے ا ما، ما ب ہیں جو مختلف علامت ہیں۔ اس لیے ا ما اور ما ب کی نسبت

ایک منفی مقدار ہے۔



پس معلوم ہوا کہ اگر ۲ ب کے حصص کی نسبت کی علامت مثبت ہو تو تقسیم داخلی ہوگی اور اگر نسبت مذکور کی علامت منفی ہو تو تقسیم خارجی ہوگی۔
خارجی تقسیم کی صورت میں اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہوگی جس کی عددی قیمت اسے بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر ما ا کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی کسر واجب ہوگی۔
نوٹ۔ عام طور پر اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو اختصار اور سہولت کے منظر خط کے حصوں کی نسبت کی علامت کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر ا ب محدودہ پر نقطہ ما ایسا ہو کہ ا ما اور ما ب کی نسبت ۲ : ۳ کی نسبت میں ہوئی ہے۔

۱۵۔ مسئلہ۔ ایک دیے ہوئے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں داخل ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر اور خارجاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔



اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط ا ب کو داخل ایک دی ہوئی نسبت ج میں دو مختلف نقطوں لا اور لا پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ا}{ب} \quad \text{اور} \quad \frac{لا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ا + لا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{لا}{ب} \quad \text{یعنی} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

∴ لا ب = لا ب

پس لا منطبق ہے لا پر یعنی لا اور لا مختلف نقطے نہیں ہیں۔
اسی طرح خارجی تقسیم کی صورت میں بھی یہ مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔
اس کا ثبوت مندرجہ بالا طریقہ سے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۱

(۱) ایک خط مستقیم ۶۹ لبا ہے اس کی داخلی تقسیم ۵:۴ کی نسبت
میں کی گئی ہے۔ خط کے حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۴۶، ۵)

(۲) ایک خط مستقیم ۴۵ سمر لبا ہے۔ اس کی خارجی تقسیم ۵:۴ کی
نسبت میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۲۲، ۵ سمر ۱۸ سمر)

(۳) خط مستقیم ا ب ۶۵ سمر لبا ہے اس کو داخلا لا پر اور خارجا ما پر
ایک ہی نسبت ۵:۴ میں تقسیم کیا گیا ہے، لا اور ا ما کے طول معلوم کرو

اور تصدیق کرو کہ $\frac{۲}{ا} = \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{اما}$ [جواب لا = ۴ سمر
اما = ۱۶ سمر]

(۴) رُبع خط مستقیم کی داخلی تقسیم نسبت م:ن میں کی گئی ہے، حصوں

کے طول معلوم کرو (جواب $\frac{۱}{م} + \frac{۱}{ن} = \frac{۱}{ن+م}$)

(۵) رُبع خط مستقیم کی خارجی تقسیم نسبت م:ن میں کی گئی ہے، حصوں

کے طول معلوم کرو۔ (جواب $\frac{۱}{م} - \frac{۱}{ن} = \frac{۱}{ن-م}$)

(۶) دو خطوط مستقیم ا ب اور ج د کی داخلی تقسیم ایک ہی نسبت میں بالترتیب
لا اور ما پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ا ب : لا ب = ج د : ماد

(۲) ا ب : لا = ج د : ج ما

(۳) ا ب ایک خط مستقیم ہے، ایک نقطہ لا ا سے ب کی طرف

مسلط طور پر حرکت کرتا ہے، نسبت ۱۲ : ۱۰ کی قیمت کے تغیر پر بحث کرو۔
وض کرو کہ ۱۰ : ۱۲ کا وسطی نقطہ وہ ہے اگر نقطہ ۱۰ پر ہو تو نسبت ۱۰ : ۱۲ = ۰

ب ————— و ————— ۱۲ ————— ا

اگر نقطہ ۱۰، اور و کے درمیان ہو تو نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب ایک مثبت کسر واجب ہوگی۔ جوں جوں نقطہ ۱۰، و کے قریب آتا جاتا ہے یہ نسبت جو ۱ سے کم ہے بتدریج ۱ کے قریب آتی جاتی ہے اور جب ۱۰، و پر منطبق ہوتا ہے تو نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب = ۱

اگر ۱۰، و اور ب کے درمیان ہو تو نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب بڑی۔ ۱ سے ۱ جوں جوں ۱۰ کی طرف جاتا ہے نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے، جب ۱۰، ب کے نہایت قریب جاتا ہے تو اس نسبت کی قیمت بہت بڑی ہو جاتی ہے اور جب ۱۰، ب پر منطبق ہو جاتا ہے تو ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب کا طول صفر ہو جاتا ہے اور نسبت = ۱۰ : ۱۲ : صفر۔

اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اس نسبت کی قیمت لاتنا ہی ہے اور اسے علامت ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔ طالب علم کو بخوبی سمجھ لینا چاہیے کہ جن معنوں میں عام اعداد وجود رکھتے ہیں ان معنوں میں ∞ کوئی عدد نہیں ہے مندرجہ بالا الفاظ کا مفہوم صرف یہ ہے کہ "۱۰ کو ب کے کافی قریب لینے سے ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب کی قیمت کو کسی دیے ہوئے عدد سے (خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو) بڑا بنایا جاسکتا ہے۔"

پس معلوم ہوا کہ جب ۱۰، ۱ سے ب تک مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے تو نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب کی قیمت مسلسل طور پر صفر سے ∞ تک بدلتی ہے۔

(۸) اب ایک خط مستقیم ہے۔ ایک نقطہ ۱۰، ب سے روانہ ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے۔ (دیکھ نیچے کی شکل) نسبت ۱۰ : ۱۲ : ۱۰ کا ب کے تغیر پر بحث کرو۔

۱ ————— ب ————— ۱۲ ————— →

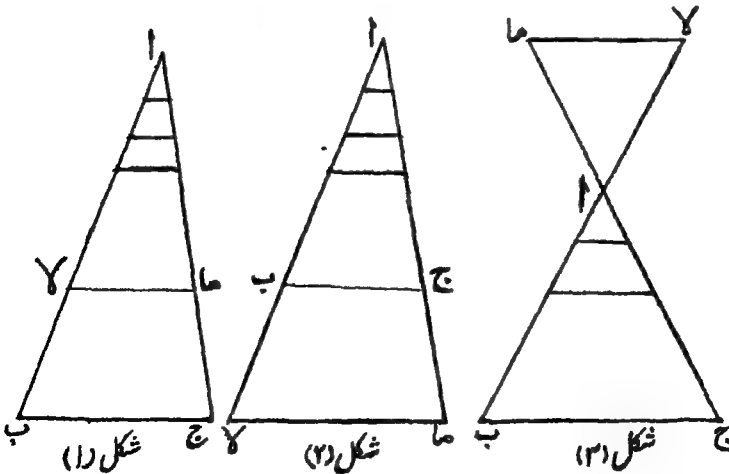
ظاہر ہے کہ یہ نسبت منفی ہوگی۔

جب $\frac{ا}{ب}$ کے قریب ہے تو $\frac{ا}{لا}$: $\frac{ب}{لا}$ بہت بڑی منفی مقدار ہے اور $\frac{ا}{لا}$ کو $\frac{ب}{لا}$ کے کافی قریب لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ جوں جوں $\frac{ا}{لا}$ دائیں جانب حرکت کرتا ہے اس نسبت کی عددی قیمت گھٹتی جاتی ہے لیکن ہمیشہ $\frac{ا}{ب}$ سے بڑی رہتی ہے۔ $\frac{ا}{لا}$ کو $\frac{ب}{لا}$ سے کافی دور لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو $\frac{ا}{ب}$ کے جس قدر قریب چاہیں لا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ جوں جوں $\frac{ا}{ب}$ سے شروع ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے نسبت $\frac{ا}{لا}$: $\frac{ب}{لا}$ کی عددی قیمت ∞ سے $\frac{ا}{ب}$ کے قریب آتی جاتی ہے۔

نوٹ۔ دیکھا جائے کہ نسبت $\frac{ا}{لا}$: $\frac{ب}{لا}$ کی کسی عددی قیمت کے جواب میں جو $\frac{ا}{ب}$ سے بڑی ہے نقطہ $\frac{ا}{لا}$ کے دو مقام ہیں جن میں ایک $\frac{ا}{ب}$ کے درمیان ہے اور دوسرا $\frac{ا}{ب}$ محدودہ پر $\frac{ب}{لا}$ کے دائیں جانب ہے۔

(۹) سوال ۵ کے مائل طریقہ سے نسبت $\frac{ا}{لا}$: $\frac{ب}{لا}$ کے تغیر پر بحث کرو جبکہ $\frac{ا}{ب}$ محدودہ پر $\frac{ا}{ب}$ سے شروع ہو کر بائیں جانب حرکت کرے۔

۱۶۔ مسئلہ: ایک خط مستقیم جو ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے مثلث کے باقی دو اضلاع کو یا اضلاع محدودہ کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اس کا



مثلاً اب ج کے ضلع ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع اب، ج کو یا اضلاع مدودہ کو بالترتیب لا اور ما پر کاٹتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ
 $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ماج}$ -
 شکل ۱ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب، ج کی داخلی تقسیم کرتے ہیں۔

اشکال ۱ اور ۲ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب اور ج کی خارجی تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا اور لاب کے طولوں کا وسطی مشترک طول ط ہے، نیز فرض کرو کہ الا میں طول ط، م وسطی مشترک ہے اور لاب میں طول ط، ن وسطی مشترک ہے۔

$$\text{تب } \text{الا} = \text{م} \times \text{ط} \text{ اور } \text{لاب} = \text{ن} \times \text{ط}$$

$$\therefore \text{الا} : \text{لاب} = \text{م} \times \text{ط} : \text{ن} \times \text{ط} = \text{م} : \text{ن} \dots \dots \dots (۱)$$

الا اور لاب کو طول ط والے حصوں میں تقسیم کرو اور نقاط تقسیم میں ب ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ ان خطوط کے ذریعہ اما اور ماج بالترتیب مساوی طول والے م اور ن حصوں میں تقسیم ہو جائیں گے۔ فرض کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک کا طول = ل

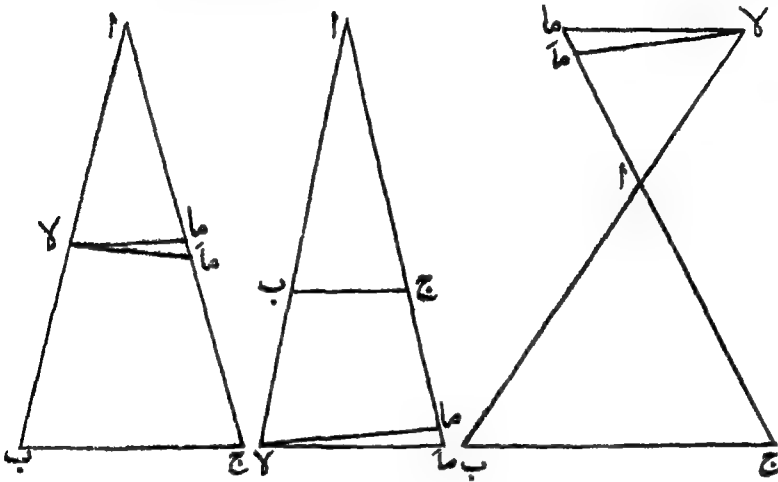
$$\text{تب } \text{اما} = \text{م} \times \text{ل} \text{ اور } \text{ماج} = \text{ن} \times \text{ل}$$

$$\therefore \text{اما} : \text{ماج} = \text{م} \times \text{ل} : \text{ن} \times \text{ل} = \text{م} : \text{ن} \dots \dots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے، $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ماج}$ - یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ - شکل ۱ میں لا : لاب اور نیز اما : ماج دونوں مثبت ہیں اور مقداریں مساوی ہیں۔

اشکال (۲) اور (۳) میں لا : لاب اور نیز اما : ماج دونوں منفی ہیں تاہم مقداریں مساوی ہیں۔

مسئلہ بالا کا عکس یہ ہے "اگر مثلث ا ب ج کے اضلاع اب، ا ج پر بالترتیب نقاط لا اور ما اس طرح لیے جائیں کہ (بمطابق مقدار اور علامت کے)
 $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ما ب}$ تو لا ما متوازی ہوگا ب ج کے،"



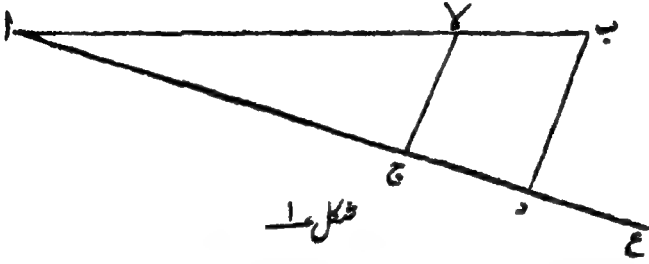
اگر لا ما متوازی نہیں ہے ب ج کے تو لا ما متوازی ب ج کے کھینچو
 چونکہ لا ما // ب ج اس لیے $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ما ج}$
 لیکن معلوم ہے $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ما ج}$
 اس لیے $\text{اما} : \text{ما ج} = \text{اما} : \text{ما ج}$

اس لیے نقطہ ما، منطبق ہے نقطہ ما پر

پس ثابت ہوا کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے

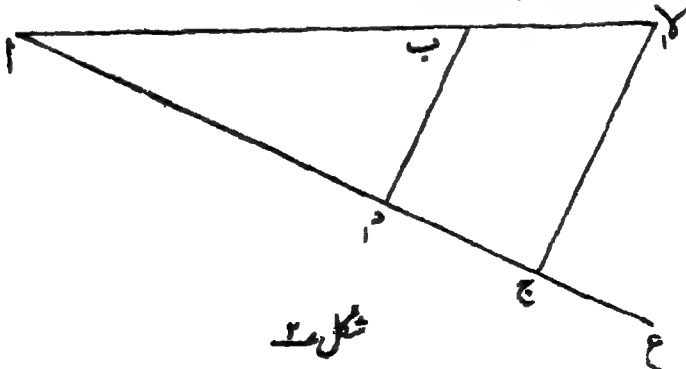
نوٹ: مسئلہ بالا کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ لا اور لاب متوافق
 مقدار میں ہیں۔ اگر لا اور لاب غیر متوافق ہوں تو کسی بہت چھوٹی اکائی کی رقوم میں
 ان دونوں طولوں کو ناپنے سے $\text{الا} : \text{لاب}$ کی تقریبی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے اور ثابت
 کیا جاسکتا ہے کہ $\text{اما} : \text{ما ج}$ کی تقریبی قیمت $\text{الا} : \text{لاب}$ کی تقریبی قیمت کے مساوی ہے۔
 نتیجہ صریح: اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کو دو خطوط مستقیم قطع
 کریں تو ایک قاطع پر کے مقطوعوں کے طول دوسرے قاطع پر کے متناظر مقطوعوں کے

طولوں کے متناسب ہونگے۔
۱۔ مسئلہ عملی ایک دیے ہوئے خط کو داخل اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔
داخلی تقسیم۔ [دیکھو شکل ۱۔]

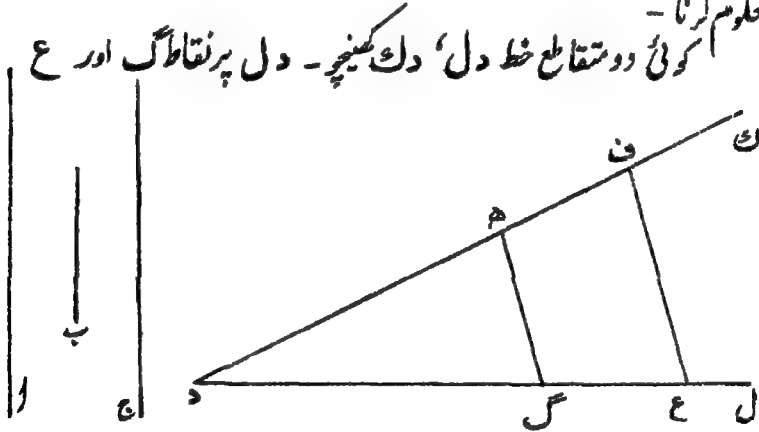


فرض کرو کہ اب ایک دیا ہوا خط مستقیم ہے۔ اسے داخل نسبت م:ن میں تقسیم کرنا مقصود ہے۔ اسے کوئی اور خط اے کی پیروی اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر اے پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں۔

دب کو ملاؤ اور دب کے متوازی ج کا کیچھو جو اب سے لا پر ملے
تب نقطہ لا خط اب کو داخل دی ہوئی نسبت م:ن میں تقسیم کریگا۔
چونکہ ج لا متوازی ہے شلت اب د کے ضلع دب کے
اس لیے لا:اب = ا ج:ج د = م:ن
خارجی تقسیم [دیکھو شکل ۲۔]



۱۷ میں سے کوئی اور خط $اع$ کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر $اع$ پر تقاطع اور $د$ ایسے معلوم کرو کہ $اج$ میں ایسی م اکائیاں اور $ج$ میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں (خارجی تقسیم کی صورت میں $اج$ اور $ج$ کی سمتیں مخالف ہونگی)۔
 $د$ ب کو ملاؤ اور $د$ ب کے متوازی $ج$ کا کھینچو جو $اب$ محدودہ سے $لا$ پر ملے تب نقطہ $لا$ خط $اب$ کو خارجاً دی ہوئی نسبت $م : ن$ میں تقسیم کریگا۔
 چونکہ $ج$ کا متوازی ہے مثلث $اب$ $د$ کے ضلع $د$ ب کے
 اس لیے $لا : اب = اج : ج = د : م = ن$
 پس $اب$ کی داخلی تقسیم $لا$ پر اور خارجی تقسیم $لا$ پر دی ہوئی نسبت $م : ن$ میں ہوتی ہے۔
۱۸۔ مسئلہ عملی۔ تین دیے ہوئے خطوط $ا$ ب، $ج$ کا چوتھا تناسب معلوم کرنا۔

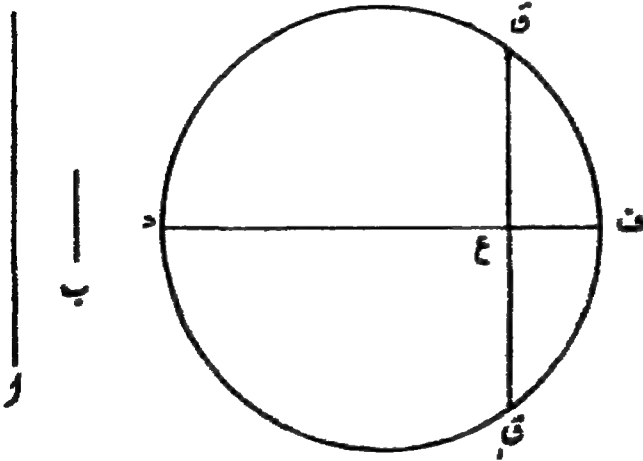


ایسے معلوم کرو کہ $دگ = لا$ اور $گ$ ع = $ب$ اور $د$ ک پر نقطہ $ھ$ ایسا معلوم کرو کہ $دھ = ج$
 $گ$ ھ کو ملاؤ اور $گ$ ھ کے متوازی $ع$ ف کھینچو جو $د$ ک سے $ف$ پر ملے۔
 تب $ھ$ ف چوتھا تناسب ہوگا معلومہ خطوط $ا$ ب، $ج$ کا
 چونکہ مثلث $د$ ع $ف$ میں $گ$ ھ $||$ $ع$ ف
 اس لیے $دگ : گ$ ع = $دھ : ھ$ ف

یعنی $ا : ب = ج : ح$ ف

پس ثابت ہوا کہ $ا ح$ چوتھا تناسب ہے $ا$ ب ج کا
نوٹ: تیسرے تناسب کی تعریف سے ظاہر ہے کہ $ا$ اور $ب$ کا تیسرا
تناسب فی الحقیقت $ا$ ب کا چوتھا تناسب ہے۔

اس لیے مندرجہ بالا مسئلہ عملی کے طریقے سے دو دیے ہوئے خطوط مستقیم
 $ا$ اور $ب$ کا تیسرا تناسب معلوم کیا جاسکتا ہے۔
۱۹۔ مسئلہ عملی۔ دو دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے درمیان
وسط تناسب معلوم کرنا۔



ایک خط مستقیم پر تین نقطے د ا ع ف ایسے معلوم کرو کہ

$$د ع = ا اور ع ف = ب$$

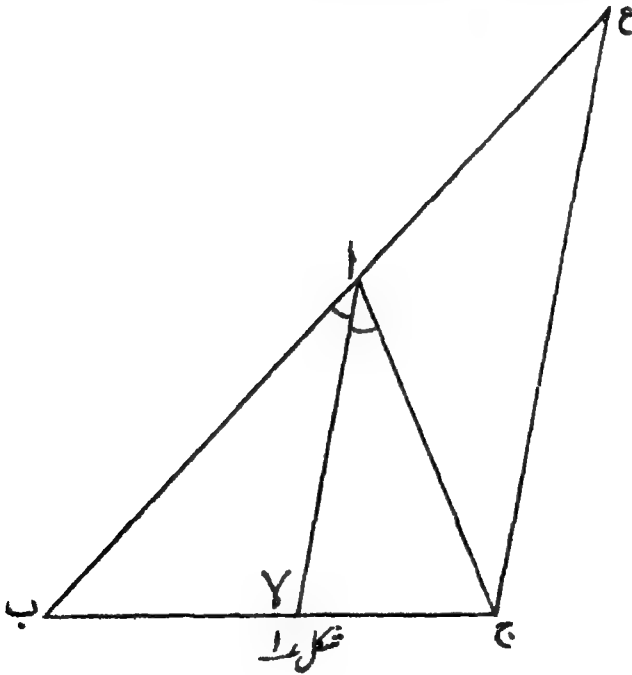
د ف کو قطربان کر دائرہ کھینچو اور ع میں سے ایک خطی ع ق کھینچو
جو د ف پر عمود ہے اور دائرہ سے ق اور ق پر ملتا ہے۔

تب ع ق وسط تناسب ہوگا دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے
درمیان۔ چونکہ قطر د ف عمود ہے وتر ق ق پر

$$اس لیے ق ع = ع ق$$

نیز ق ق اور د ف کے حصول کے حاصل ضرب مساوی ہیں
یعنی ق ع × ع ق = د ع × ع ف
یعنی ع ق^۲ = ا × ب یعنی ا : ع ق = ع ق : ب

پس معلوم ہوا کہ ع ق وسط تناسب ہے ا اور ب کے درمیان۔
نوٹ: مندرجہ بالا اعل کے متبادل ثبوت کے لیے دیکھو مسئلہ ۷ مثال ۱۰۔
۲۰۔ مسئلہ۔ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی (خارجی) ناصف مقابل
کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں داخل (خارج) تقسیم کرتا ہے اور اس کا
حصہ اول (داخلی ناصف) (دیکھو شکل ۱)



مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے
ضلع ب ج سے نقطہ لا پر ملتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ
ب لا : لا ج = ا ب : ا ج

لا کے متوازی ج ع کہینچہ جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 تب $\angle ب ا لا = \angle ا ج ع$ (متناظر زاویے)
 اور $\angle لا ا ج = \angle ا ج ع$ (مبادل زاویے)
 لیکن حسب مفروض $\angle ب ا لا = \angle لا ا ج$
 اس لیے $\angle ا ج ع = \angle ا ج ع$

(۱) $\angle ا ج = \angle ا ع$
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے $\angle ب ا لا : \angle لا ا ج = \angle ب ا ا : \angle ا ج ع$
 $= \angle ب ا ا : \angle ا ج ا$ بموجب (۱)۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

عکس۔ اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی داخلی تقسیم
 نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ $\angle ب ا لا : \angle لا ا ج = \angle ب ا ا : \angle ا ج ا$ داخلی
 ناصف ہوگا $\angle ب ا ج کا$

لا کے متوازی ج ع کہینچہ جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے $\angle ب ا لا : \angle لا ا ج = \angle ب ا ا : \angle ا ج ع$
 لیکن حسب مفروض $\angle ب ا لا : \angle لا ا ج = \angle ب ا ا : \angle ا ج ا$
 اس لیے $\angle ب ا ا : \angle ا ج ا = \angle ب ا ا : \angle ا ج ع$ یعنی $\angle ا ج ا = \angle ا ج ع$

اس لیے $\angle ا ج ع = \angle ا ج ع$

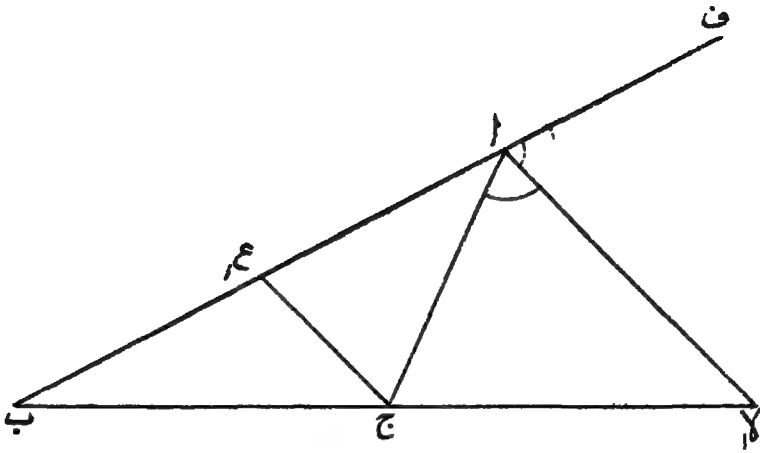
نیز $\angle ب ا لا = \angle ا ج ع$ (متناظر زاویے)

اور $\angle لا ا ج = \angle ا ج ع$ (مبادل زاویے)

اس لیے $\angle ب ا لا = \angle لا ا ج$

یعنی ا لا داخلی ناصف ہے $\angle ب ا ج کا$ ۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

حصہ دوم (خارجی ناصف) (دیکھو شکل ۲)



شکل ۲

مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا خارجی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے لا پر
ملاقاتے ثابت کرنا ہے کہ ب لا : ج لا = ا ب : ا ج
لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ا ب سے ع پر ملے۔
ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

تب $\angle ف ا ج = \angle ا ج ع$ (متناظر زاویے)

اور $\angle ا ج لا = \angle ا ج ع$ (متبادل زاویے)

لیکن حسب مفروض $\angle ف ا ج = \angle ا ج لا$

اس لیے $\angle ا ج ع = \angle ا ج لا$

(۱) اس لیے ا ج = ا ع
چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ج ع کے

اس لیے ب لا : ج لا = ب ا : ا ج

= ا ب : ا ج بموجب (۱)

یہی ثابت کرنا تھا۔

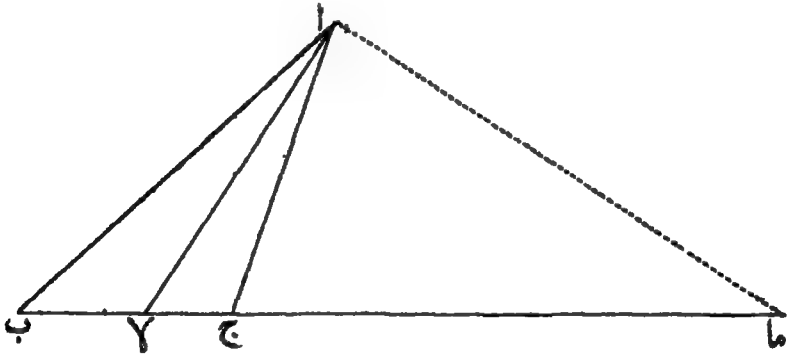
عکس۔ اگر مثلث اب ج میں ضلع ب ج کی خارجی تقسیم نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : ج لا = اب : اج تو لا خارجی ناصف ہوگا > ب اج کا
 لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا سے ع پر ملے
 ب ا کو کسی نقطہ ف ایک خارج کرو۔
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ج ع کے
 اس لیے ب لا : ج لا = ب ا : ع ا
 لیکن جب مفروض ب لا : ج لا = اب : اج
 اس لیے ب ا : ع ا = اب : اج یعنی ع ا = اج
 اس لیے > اج ع = > ا ع ج
 نیز > ف ا لا = > ا ع ج (متناظر زاویے)
 اور > لا اج = > ا ع ج (مبادل زاویے)
 اس لیے > ف ا لا = > لا اج
 یعنی لا خارجی ناصف ہے > ب اج کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ : اگر مثلث اب ج میں اب = اج تو > ب اج کا
 داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ یعنی قاعدہ کو ضلع
 کی نسبت یعنی ۱ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔
 نیز > ب اج کا خارجی ناصف قاعدہ ب ج کے متوازی ہے اور
 اس لیے قاعدہ سے لاتناہی پر ملتا ہے۔ یعنی قاعدہ کی خارجی تقسیم ۱ : ۱ کی نسبت
 میں کرتا ہے یہ بھی مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔
 ۲۱۔ تعریف :- اگر ایک خط متقیم اب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر
 اور خارجی تقسیم نقطہ ما پر اس طرح کی جائے کہ لا : اب = اما : اب ما تو
 کہا جاتا ہے کہ اب کی موسیقی تقسیم لا اور ما پر کی گئی ہے۔



بمطابق ۱ اور ب کے نقاط لا اور ما ایک دوسرے کے موسیقی فردوج کہلاتے ہیں۔

نوٹ (۱) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مثلث کے کسی زاویہ کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ (۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ب ج پر کوئی مثلث ا ب ج ایسا بنایا گیا ہے کہ ا ب : ا ج ایک مستقل مقدار ہے۔ اگر $\angle ب > \angle ج$ کے داخلی اور خارجی ناصف قاعدہ ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملیں تو لا اور ما راس ۱



کے تمام مقاموں کے لیے ثابت نقطے ہونگے۔ نیز $\angle لا ا ما قائمہ$ ہے اس لیے دی ہوئی شرائط کے ماتحت راس ۱ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر لا ما ہے۔

نوٹ (۳) اگر ایک دیے ہوئے خط ب ج کی موسیقی تقسیم لا ما پر کی جائے اور لا ما قطر پر کے دائرہ پر کوئی نقطہ ۱ ہو تو ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ا ب : ا ج ایک مستقل مقدار ہے (دیکھو دفعہ ۹۳ باب ۶)۔

لا ما قطر پر کے دائرہ کو اپولونیئس (Appolonius) کا دائرہ کہتے ہیں اور یہ دائرہ اُس نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مستقل نسبت میں رہتے ہیں۔

امثلہ ۱

(۱) ثابت کرو کہ مثلث کے کسی دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط

- تیسرے ضلع کے متوازی ہے۔
- (۲) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط قاعدہ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط دوسرے ضلع کی نصفیت کرتا ہے۔
- (۳) ثابت کرو کہ مخروط کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔
- (۴) مثلثات ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ا ج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ف گ متوازی ہے ا د کے۔
- (۵) ایک خط مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب (ممدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب د ا ع، ف پر ملتا ہے اور ا ب، ا ج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ا د : ج د = ب ف : ج ع۔
- (۶) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے زاویہ ب کے داخلی ناصف پر۔ ثابت کرو کہ ایک خط جو د میں سے ب ج کے متوازی کھینچا جائے ا ج کی نصفیت کرتا ہے۔
- (۷) ا، ب، ج، د چارہم خط نقطے ہیں (اسی ترتیب میں)۔ اس خط پر ایک نقطہ و ایسا معلوم کرو کہ ا و : و د = ب و : و ج
- (۸) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے۔
- (۹) اگر ا ب = ۳، ا ج = ۴، اور ا لا = ۵ تو ا ما محسوب کرو
[جواب ۱، ۲]
- (ب) اگر ا ب = ۴، ا ج = ۵، اور ا ما = ۶ تو ب لا محسوب کرو۔
[جواب ۷، ۸]
- (ج) اگر ا لا : لا ب = ۸ : ۳ اور ا ج = ۸ سمجھو
[جواب ۶، ۳ سمجھو]

(۹) مثلث ا ب ج میں $\angle \alpha = 120^\circ$ ، $\angle \beta = 20^\circ$ اور $\angle \gamma = 40^\circ$ کے داخلی اور خارجی مُنصفِ ضلع ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ب لا اور ب ما کے طول محسوب کرو۔
[جواب 19° ، 25°]

(۱۰) مثلث ا ب ج کا ایک وسطانیہ ا د ہے، زاویوں ا د ب اور ا د ج کے داخلی ناصف ا ب ، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔
(۱۱) اگر دو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے زاویوں ا اور ج ناصف ب د پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویوں ب اور د کے ناصف ا ج پر ملینگے۔

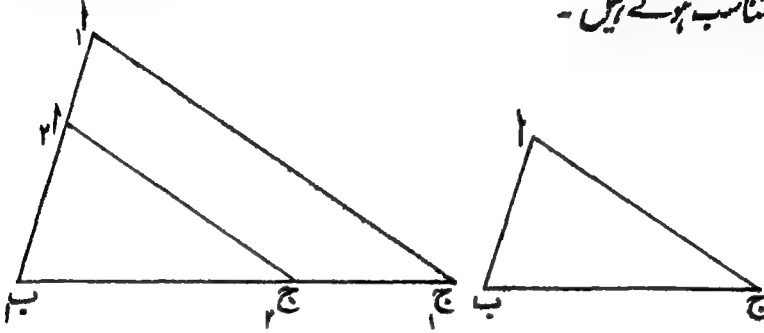
(۱۲) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ
(۱) مثلث کے تینوں زاویوں کے داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) مثلث کے دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔
(۱۳) مثلث کا قاعدہ، اُسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم ہیں، مثلث بناؤ۔

۲۲۔ متشابہ اشکال۔

تعریفات۔ اگر دو مستقیم الاضلاع اشکال ایسی ہوں کہ ایک کے زاویے دوسری شکل کے زاویوں کے جداگانہ ایک ہی ترتیب میں مساوی ہوں اور ایک کے ضلع دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے متناسب ہوں تو یہ اشکال ایک دوسرے کے متشابہ کہلاتی ہیں یا مختصراً ان کو متشابہ اشکال کہتے ہیں۔
اگر ایک مستقیم الاضلاع شکل کے زاویے جداگانہ ایک ہی ترتیب میں

دوسری شقیم الاصلع شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں تو یہ اشکال مساوی الزویا کہلاتی ہیں۔
 ۲۳۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلث مساوی الزویا ہوں تو ان کے نظیر کے ضلع متناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات ا ب ج، ا ب ج میں $\angle A = \angle D$ ،
 $\angle B = \angle E$ اور (لازمًا) $\angle C = \angle F$ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

ب ا ا پر نقطہ ا ایسا لو کہ ب ا = ب ا اور ب ا ج پر
 نقطہ ج ایسا لو کہ ب ج = ب ج،
 ا ج کو ملاؤ۔

تب مثلثات ب ا ج، ا ب ج اور ب ا ج ہر طرح سے باہم مساوی ہونگے۔

اس لیے $\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle F$ اور

اور حسب مفروض $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ اور

اس لیے $\angle C = \angle F$ ، $\angle B = \angle E$ اور

اس لیے $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

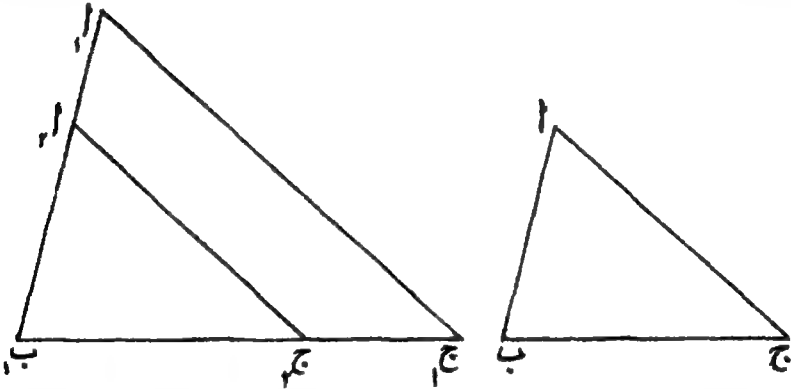
(۱) $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ج} \frac{ج}{ا}$ یعنی

(۲) $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ا} \frac{ا}{ج}$ اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ا}$ جو

ثابت کرنا تھا۔

۲۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے متناسب ہوں تو متناظر اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہونگے۔



مثلثات $ا ب ج$ اور $ا ب ج$ میں $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ا}$ ثابت کرنا ہے کہ $ا > ا$ ، $ب > ب$ اور (لازمًا) $ج > ج$

ب $ا$ پر نقطہ $ا$ ایسا کہ $ب ا = ب ا$ اور $ب ج$ پر نقطہ $ج$ ایسا کہ $ب ج = ب ج$ ۔

$ا ج$ کو ملاؤ۔

چونکہ حسب مفروض $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج}$

اس لیے $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج}$ (حسب عمل)

اس لیے $\frac{ا ج}{ا ج} // \frac{ا ج}{ا ج}$

یعنی مثلثات $\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$ اور $\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$ اور $\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$

اور $\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$

اس لیے یہ مثلثات متساوی الزوا یا ہیں۔

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

اس لیے مثلث $\frac{ا ج}{ا ج}$ کے ضلع بالترتیب مثلث $\frac{ا ج}{ا ج}$ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔

اس لیے یہ مثلثات آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

$$\frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج}$$

پس ثابت ہوا کہ مثلثات $\frac{ا ج}{ا ج}$ اور $\frac{ا ج}{ا ج}$ متساوی الزوا یا ہیں۔

۲۵۔ متشابه اشکال پر نوٹ۔ تعریف سے ظاہر ہے کہ

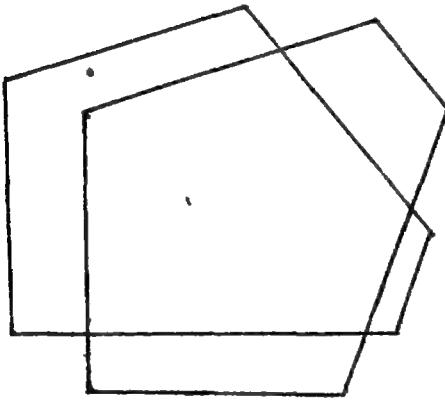
متشابه اشکال کے لیے دو شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

(۱) ایک شکل کے زاویے ایک ہی ترتیب میں جدا جدا دوسری شکل

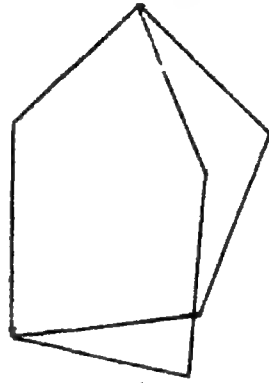
کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

(۲) ایک شکل کے ضلعے متناسب ہوں دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے -

وفاقت ۲۳ اور ۲۴ سے ظاہر ہے کہ مثلثات کی صورت میں مندرجہ بالا شرائط میں سے کسی ایک شرط کے پورا ہونے پر دوسری شرط لازماً خود بخود پوری ہوتی ہے، لیکن تین سے زیادہ ضلعوں والی اشکال کی صورت میں ان کے باہم تشابہ ہونے کے لیے دونوں شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے -
اس امر کی توضیح اشکال ذیل سے ہوتی ہے -



شکل ۱۔



شکل ۲۔

شکل ۱ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۱) کو پورا کرتے ہیں اور شرط (۲) کو پورا نہیں کرتے - شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع متشابه نہیں ہیں -

شکل ۲ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۲) کو پورا کرتے ہیں لیکن شرط (۱) کو پورا نہیں کرتے - شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع بھی متشابه نہیں ہیں -

اس امر کی ایک اور سادہ مثال ذیل میں درج ہے -
ایک مربع اور مستطیل متساوی الزوایا ہیں لیکن ان کے نظیر کے اضلاع متناسب نہیں ہیں - اس لیے یہ دو اشکال متشابه نہیں ہیں - نیز ایک مربع اور معین میں ضلعے متناسب ہیں لیکن اشکال متساوی الزوایا نہیں ہیں اس لیے یہ بھی متشابه نہیں ہیں -

امثلہ ۳

(۱) مثلث ا ب ج میں لا ماحوزی ہے ب ج کے اور اضلاع ا ب ، ا ج سے
نقاط لا ، ما پر ملتا ہے

$$(۱) \text{ اگر ا ب } = ۲۵۴ ، \text{ ب ج } = ۶۱۶ ، \text{ لا } = ۴۸۲ \text{ تو لا ما}$$

[جواب ۱۷۱]

معلوم کرو۔

$$\text{ب ، اگر ا ب ج } = ۷۷۴ ، \text{ سم } ، \text{ لا ما } = ۵۵۴ ، \text{ سم } ، \text{ لا } = ۵۵۴$$

[جواب ۱۷۱ سم]

تو ا ب معلوم کرو۔

$$(۲) \text{ مثلث ا ب ج میں } ۱ = ۲ ، \text{ ب } = ۳ ، \text{ ج } = ۵ ، \text{ سم } = ۷$$

قاعدہ کے سروں میں سے خطوط ا ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہیں

اور وہ ایک دوسرے کون پر قطع کرتے ہیں اگر ع ن : ن ج = د ن : ن ب = ۵ : ۲

تو ع د ، ا ع اور ج د کے طول معلوم کرو۔ [جواب ۸ ، ۱۸ ، ۲۴]

(۳) ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا

نصف ہے۔

(۴) ایک دائرہ کے دو وتر ا ب اور ج د ایک دوسرے کو نقطہ ط پر قطع

کرتے ہیں ثابت کرو کہ $ا ط \times ط ب = ج ط \times ط د$

(۵) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کا مماس وت کھینچا گیا ہے اور وہیں

سے گزرنے والا کوئی قاطع دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$و ا \times و ب = و ت$ ۔

(۶) مثلث ا ب ج کے اندرونی اور باہری دائروں کے مرکز معمولی ترقیم کے

مطابق سے 'ے' ، 'ے' ، 'ے' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) جے \times جے = ا ب$$

$$(ب) اے \times اے = بے \times بے$$

$$جے \times جے =$$

(۷) مثلث ا ب ج کا اندرونی مرکز سے 'ے' میں سے ایک خط

کھینچا گیا ہے جو $\frac{1}{2}$ پر عمود ہے اور $\frac{1}{2}$ ج سے بالترتیب د' ع پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ج د

(۸) مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے $\frac{1}{2}$ سوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود $\frac{1}{2}$ ج د' ع
ج ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د' ع ف' ب د' ف' ج د' ع میں سے
ہر ایک مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے متشابه ہے۔ اس کی مدد سے مثلث د' ع ف کے
اضلاع کے طول مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے اضلاع اور زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔
[جواب ع ف = $\frac{1}{2}$ ج د]

(نوٹ - مثلث د' ع ف کو مثلث $\frac{1}{2}$ ج کا مثلث بائیں کہتے ہیں)۔
(۹) مثلث $\frac{1}{2}$ ج بناؤ جس میں $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ج' ب' ج = $\frac{1}{2}$ ج اور
محیط = $\frac{1}{2}$ ج' ب' ج کے طول محسوب کرو۔ [جواب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ج' ب' ج = $\frac{1}{2}$ ج' ب' ج = $\frac{1}{2}$ ج' ب' ج]
(۱۰) مثلث $\frac{1}{2}$ ج میں $\frac{1}{2}$ ج قائم ہے اور $\frac{1}{2}$ ج وتر $\frac{1}{2}$ ج پر عمود ہے
ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د' ج ا' ج ب' ا' باہم متشابه ہیں اور اس کی مدد سے
ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ج د}$$

$$(۲) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ج ب}$$

$$(۳) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ج ج}$$

$$(۴) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ج' ج}$$

$$(۵) \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \text{ ج' ج}$$

(۱۱) مثلث $\frac{1}{2}$ ج میں $\frac{1}{2}$ ج عمود ہے ب ج پر اور $\frac{1}{2}$ ج مثلث $\frac{1}{2}$ ج
کے محیط دائرہ کا قطر ہے، ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د اور $\frac{1}{2}$ ج ب باہم متشابه ہیں
اور اس سے اخذ کرو کہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ج د}$

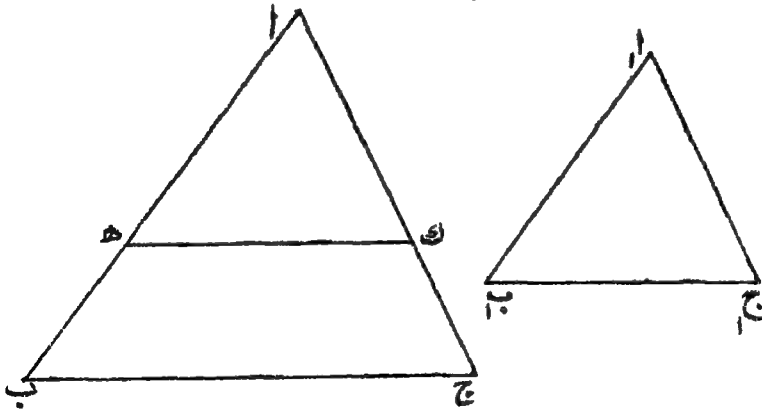
(۱۲) مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے زاویہ $\frac{1}{2}$ کا اندرونی ناصف ضلع ب ج سے لاپر اور
مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے محیط دائرہ سے صابر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د
اور $\frac{1}{2}$ ج ب باہم متشابه ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ج د}$
(۱۳) ایک شخص جس کا قدم ۴ فٹ ہے ایک روشنی کے کنبے سے ۳۲ فٹ کے

فاصلہ پر کھڑا ہے اور اس کے سایہ کا طول ۸ فٹ ہے۔ بتاؤ کہ روشنی زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔ [جواب ۳۱ فٹ]

(۱۳۷) ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اس نے نہر کے ایک کنارہ پر ۱۰ فٹ اونچی سڈنٹ نصب کی۔ پھر وہ اس کنارہ سے عموداً ۲۰ فٹ پیچھے ہٹا تو سڈنٹ کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ ایک سیدھ میں دکھائی دیے۔ اگر اس شخص کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو تو نہر کی چوڑائی معلوم کرو۔ [جواب ۱۰ فٹ]

(۱۳۸) دو انتصابی کعبے ۵ فٹ اور ۱۲ فٹ اونچے ہیں۔ ہر ایک کی چوٹی کو دوسرے کعبے کے قدم سے رسیوں کے ذریعہ ملا لیا گیا ہے۔ رسیوں کے نقطہ تقاطع کی بلندی سطح زمین سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بلندی کعبوں کے درمیانی فاصلہ پر منصفہ نہیں ہے۔ [جواب ۲۰ فٹ]

۲۶۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلثات متشابه ہوں گے۔



مثلثات ا ب ج اور ا ب ج میں $\angle A = \angle D$ اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

ا ب پر نقطہ ہ ایسا کہ $AE = AB$ اور ا ج پر نقطہ ک ایسا کہ

اک = ا ج -
ہک کو ملاؤ۔

مثلثات اہک، اب ج میں

$$\Delta ا = \Delta ا$$

$$ا = ا ب$$

$$اور ا ک = ا ج$$

$$۔۔۔ \Delta اہک = \Delta اب ج$$

$$حسب مفروض \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ج}$$

$$اس لیے \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ج} \text{ حسب عمل}$$

اس لیے ہک متوازی ہے ب ج کے

$$اس لیے \Delta اب ج = \Delta اہک = \Delta اب ج$$

$$اور \Delta اب ج = \Delta اکھ = \Delta اب ج$$

اس لیے مثلثات اب ج اور اب ج مساوی الزوایا میں لہذا
متشابه ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث اب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ کے متوازی ہے اور باقی
اضلاع سے کلا اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسے گزرنے والا وسطانیہ
خط لا ما کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) مثلثات اب ج اور اب ج متشابه ہیں۔ ثابت کرو کہ
ان کے حاطہ دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے اضلاع کی نسبت کے
مساوی ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ متشابه مثلثات میں نظیر کے رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔
(۴) ثابت کرو کہ متشابه مثلثات کے اخذ دنی دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کا قطر مثلث کے حائظ دائروں کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج مساوی الاضلاع ہے۔ ہر ضلع کا طول $\sqrt{3}$ ہے۔ ضلع ب ج کو دونوں جانب خارج کر کے اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لیے گئے ہیں کہ ب ن = ج ق = $\sqrt{3}$ اور ا ن اور ا ق کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ن ق : ن ا } = \text{ ن ا : ن ب}$$

$$(۲) \text{ ن ا } = \frac{۳}{۲}$$

(۷) دو دائرے جن کے نصف قطر ل م اور ل پ ہیں ایک دوسرے کو نقطہ ا پر خارجاً مس کرتے ہیں۔ اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس ا ن کو ق اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\angle ف ا ق$ قائم ہے

$$\text{اور } ف ق = \frac{۳}{۲} ل م$$

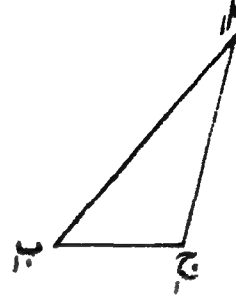
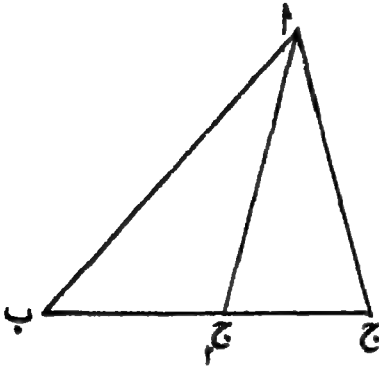
(۸) دو دائرے ایک دوسرے کو ا پر خارجاً مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس ف ق مرکزوں کے خط سے سن پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات سن ا ف اور سن ق ا متشابه ہیں۔

$$(۲) س ا = س ف \times س ق$$

$$(۹) \text{ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج میں } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ج}$$

اور $\angle ب = \angle ب$ ، اگر $\angle ج \neq \angle ج$ تو ثابت کرو کہ

$$\angle ج + \angle ج = \text{دو قائمے۔}$$



چونکہ $\angle C > \angle J$ $\neq \angle C > \angle A$ اس لیے $\angle C > \angle A$
 اب ا میں سے ایک خط AJ ایسا کھینچو کہ $\angle BAJ = \angle BJA$
 فرض کرو کہ $\angle AJC$ ، $\angle B$ سے $\angle C$ پر ملتا ہے۔

اب مثلثات ABJ اور ABC متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{AB}{AJ} = \frac{AJ}{AC}$$

$$\text{لیکن دیا گیا ہے کہ } \frac{AB}{AJ} = \frac{AJ}{AC}$$

$$\text{یعنی } \frac{AJ}{AC} = \frac{AJ}{AJ} \text{ یعنی } \angle A = \angle C$$

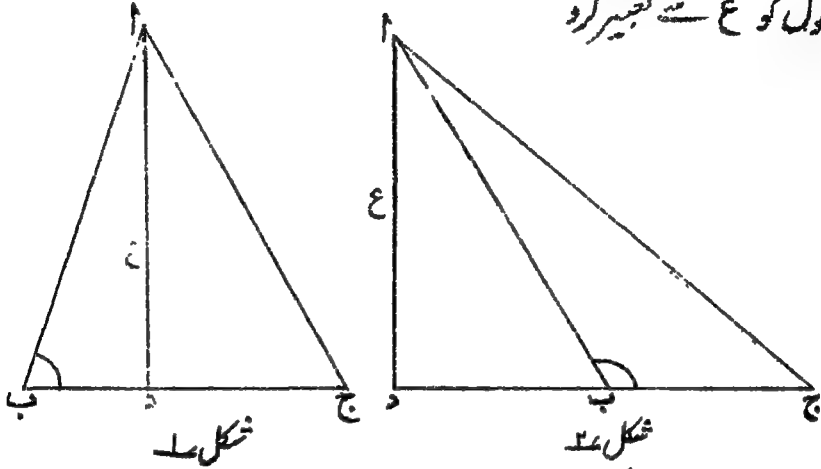
$$\text{اس لیے } \angle A > \angle C = \angle A > \angle C$$

$$\text{اس لیے } \angle A > \angle B + \angle C = 2 \text{ قائمے۔}$$

$$\text{لیکن } \angle A > \angle B = \angle A > \angle B$$

$$\text{اس لیے } \angle A > \angle B + \angle C = 2 \text{ قائمے۔}$$

۷۳۔ بعض ہندسی نتائج کو مثلثی نسبتوں کے استعمال سے نہایت عمدہ طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔
(۱) مثلث $\triangle ABC$ میں AD عمود ہے B پر۔ AD کے طول کو E سے تعبیر کرو



تب $E = BC$ جب $\angle A = 90^\circ$
 شکل \triangle میں $\angle A = 90^\circ$ اور شکل \triangle میں
 $\angle A = 90^\circ$ ۔
 اس لیے دونوں صورتوں میں جب $\angle A = 90^\circ$ جب B
 $\therefore E = BC$ جب B
 اسی طرح سے $E = BC$ جب B
 $\therefore \frac{E}{BC} = \frac{B}{BC}$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{E}{BC} = \frac{B}{BC}$

$$\therefore \frac{E}{BC} = \frac{B}{BC} = \frac{A}{BC}$$

یعنی کسی مثلث کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیب کے تناسب ہوتے ہیں۔

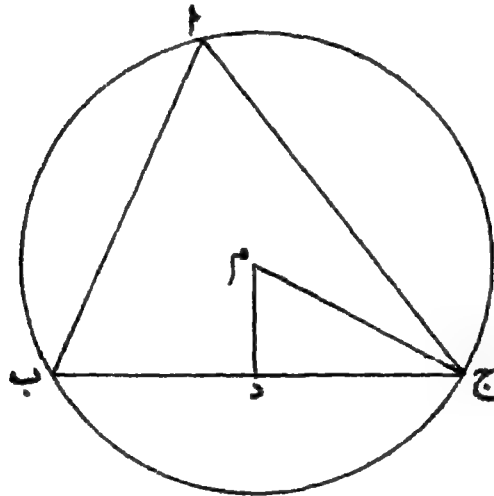
(۲) مثلث ا ب ج کا رقبہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د}$ (دیکھو شکل بالا)

$$\frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د} = \Delta$$

اسی طرح سے $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د} = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د}$ جب $\text{ا د} = \text{ج د}$ جب ب

پس حاصل ہوا کہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د} = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د} = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د}$ جب $\text{ا د} = \text{ج د}$ جب ب

(۳) مثلث ا ب ج کے حاطہ دائرہ کا مرکز م ہے، نصف قطر م ج کو



سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔ تب $\text{ا د} > \text{ج د}$ قائم ہے اور $\text{ا د} > \text{ج د}$ اور $\text{ا د} > \text{ج د}$

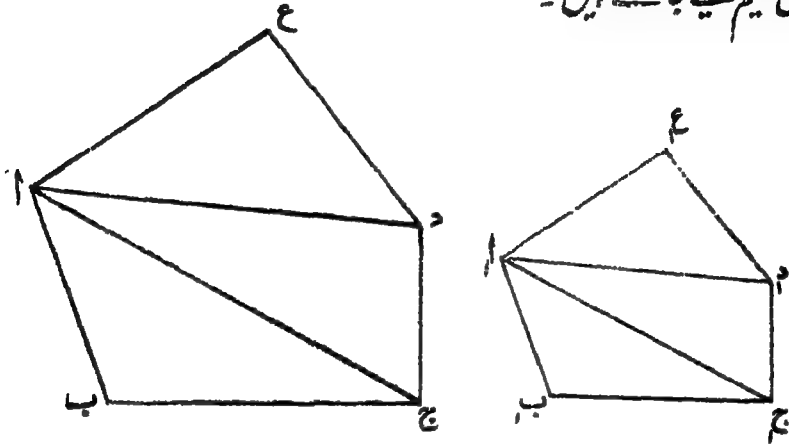
$$\text{اس لیے } \frac{\text{ج د}}{\text{ا د}} = \text{جب ا}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{\text{ا د}} = \text{جب ا}$$

$$\therefore \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\Delta} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\Delta} = \frac{1}{\text{ا د}} = \text{جب ا}$$

نوٹ: شکل بالا میں مثلث ا ب ج کے تمام زاویے حادہ لیے گئے ہیں۔

کسی ایک زاویہ کے منفرجہ یا قائمہ ہونے کی صورت میں طالب علم خود اس نتیجہ کو حاصل کرے۔
۲۸۔ مسئلہ۔ دو متشابه کثیر الاضلاع متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں۔



کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع باہم متشابه ہیں۔ ثابت
ا کرنا ہے کہ ان میں سے ہر ایک کو ایک ہی تعداد کے متشابه مثلثوں میں تقسیم
کیا جاسکتا ہے۔

ا ج، ا د، ا ج، ا د کو بلاؤ۔

چونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب ج}{ا ج} \text{ اور } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب ج}{ا ج}$$

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ب ج}{ا ج}$$

$$\text{اور } \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ب ج}{ا ج}$$

(کیونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں)

$$\frac{ا ج}{ا ج} =$$

نیز چونکہ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$

اس لیے $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$

اب مثلثات $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ میں

$\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$

اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$

اس لیے مثلثات $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ باہم متشابہ ہیں۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مثلثات $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$

بھی متشابہ ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ متشابہ کثیر الاضلاع $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اوپر کی شکل میں کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد پانچ ہے اس صورت میں جب کہ کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد پانچ سے زیادہ ہو اسی تقسیم کے استدلال سے مسئلہ بالاثبات ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اس ثبوت میں ضمنی طور پر یہ بھی ثابت ہو گیا ہے کہ

$$\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د} = \frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$$

نوٹ (۳)۔ متناظر اُصول ۱ اور ۱ کی بجائے کسی اور دو متناظر اُصول سے خطوط کھینچ کر کثیر الاضلاعوں کو متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

۲۹۔ مسئلہ۔ دو (غیر مساوی) متشابہ کثیر الاضلاعوں کو اس طرح رکھا جاسکتا ہے کہ ان کے متناظر اُصول کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں۔

دو غیر مساوی متشابہ کثیر الاضلاع $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{د}$ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ نظیر کے ضلعے 'اب'، 'اب' ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ (ظاہر ہے کہ نظیر کے ضلعوں کے دوسرے جوڑے بھی

لیکن $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج د}$ اب مثلثات $ش ب ج$ اور $ش ب ج$ میں
 $> ش ب ج = > ش ب ج$ (کیونکہ $ب ج // ب ج$)

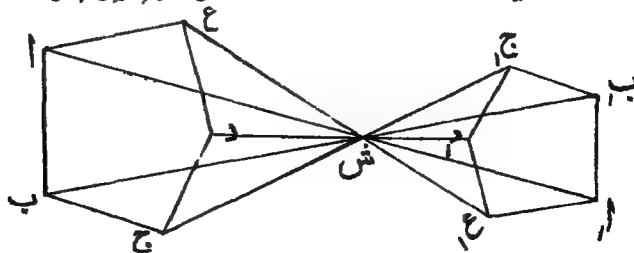
$$\frac{ش ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج د}$$

اور اس لیے مثلثات $ش ب ج$ اور $ش ب ج$ متشابه ہیں۔

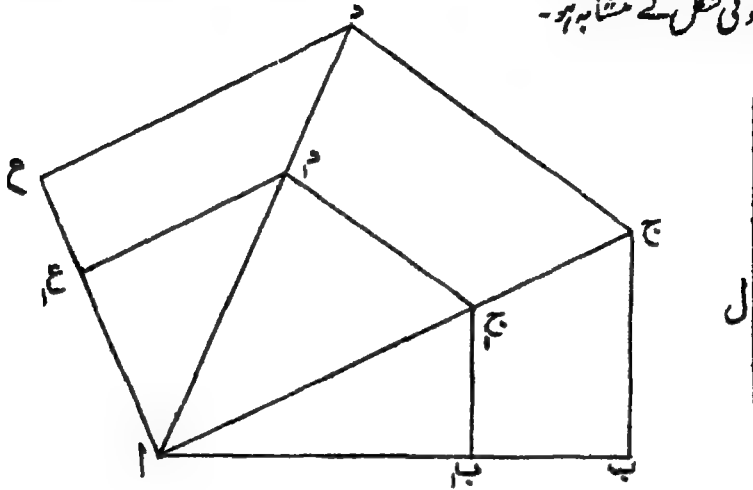
اس لیے $> ب ش ج = > ب ش ج$ اس لیے خطوط $ش ج$ اور $ش ج$ ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔
 یعنی متناظر رأسوں $ج ج$ کو لانے والا خط نقطہ $ش$ میں سے گزرتا ہے
 اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ خطوط $د د$ اور $ع ع$ بھی نقطہ $ش$ میں
 سے گزرتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ متناظر رأسوں کو لانے والے خط ایک ہی
 نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ اگر دو متشابه کثیر الاضلاع اس طرح رکھے جائیں کہ نظیر کے ضلع متوازی
 ہوں تو یہ ہم وضع شکلیں کہلاتی ہیں اور ان کے نظیر کے نقطوں کو لانے والے خطوط کا
 نقطہ تراکز $ش$ ان ہم وضع متشابه اشکال کا مشابہت کا مرکز کہلاتا ہے۔
 نوٹ (۲)۔ اگر متشابه کثیر الاضلاعوں کو ہم وضع طور پر ایک دوسرے کے اندر
 رکھا جائے تو مشابہت کا مرکز دونوں شکلوں کے اندر ہوگا۔

نوٹ (۳)۔ دفعہ ہذا کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے جو شکلیں کھینچی گئی ہیں ان میں نظیر کے
 اضلاع $ا ب$ ، $ا ب$ ایک ہی سمت میں متوازی رکھے گئے ہیں۔ اگر نظیر کے اضلاع $ا ب$ ، $ا ب$
 کو مخالف سمتوں میں متوازی رکھا جائے تو متعلقہ شکل حسب ذیل ہوگی۔



اس صورت میں نظیر کے راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرے ہونگے ۔
 ۔ مسئلہ عملی ۔ ایک دیے ہوئے قنطع پر ایک شکل کھینچنا جو ایک
 دی ہوئی شکل کے متشابه ہو ۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ع ایک دی ہوئی شکل ہے اور ل دیے ہوئے ضلع
 کا طول ہے ایک شکل بنانا ہے جو دی ہوئی شکل ا ب ج د ع کے متشابه ہو اور جس میں
 ا ب کے نظیر کے ضلع کا طول ل ہو ۔ ا ج ' ا د کو ملاؤ ۔
 ا ب (ممدودہ بشرط ضرورت) پر ایک نقطہ ب ایسا لو کہ ا ب = ل
 ب ج متوازی کھینچو ب ج کے جو ا ج سے ج پر ملے ۔
 اور ج د متوازی کھینچو ج د کے جو ا د سے د پر ملے ۔
 اور د ع متوازی کھینچو د ع کے جو ا ع سے ع پر ملے ۔
 تب ا ب ج د ع مطلوبہ شکل ہوگی ۔
 ثبوت متشابه مثلثوں کی مدد سے باسانی دیا جاسکتا ہے مشتق کے طور پر
 طالب علم ثبوت خود بھی پہنچائے ۔

امثلہ

(۱) ذرا بقہ الاضلاع ا ب ج د اور ا ب ج د متشابه ہونگے اگر

$$(۱) ۱ > ۱ = ۱ > ۱ \text{ اور } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$(۲) ۱ > ۱ = ۱ > ۱ \text{ اور } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

(۳) ذرا ربعة الاضلاع ا ب ج د کے متشابه ایک شکل بناؤ جس کے ہر ضلع کو اپنے نظیر کے ضلع کے ساتھ نسبت ۴:۳ ہو۔

(۴) ایک دے ہوئے خط ا ب پر ایک نصف دائرہ بناؤ۔ اس نصف دائرہ کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو راس قوس پر ہوں اور دو قطر پر۔ اگر ا ب کا طول ۲ ہو تو مربع کا ضلع معلوم کرو۔ (جواب $\frac{۲}{۵}$)

(۵) ۴ دے نصف قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۹۰ ہو۔ اس کے اندر ایک مربع بناؤ اور مربع کے ضلع کا طول نامہ اور حساب لگانے سے اپنے جواب کو جانچو۔ [جواب ۱ اور ۱ (۶۱-۶۲) انج]

(۶) ایک منتظم سدس ا ب ج د ع ف بناؤ جس کے ہر ضلع کا طول ۲ دے ہو اور اس کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلع ا ب د ع کے متوازی ہوں اور اس کے راس باقی اضلاع پر ہوں۔

(۷) ایک دے ہوئے مثلث کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک اور دے ہوئے مثلث کے متشابه ہو۔

(۸) ایک دے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابه ایک ایسا کثیر الاضلاع بناؤ جس کا محیط دیا گیا ہے۔

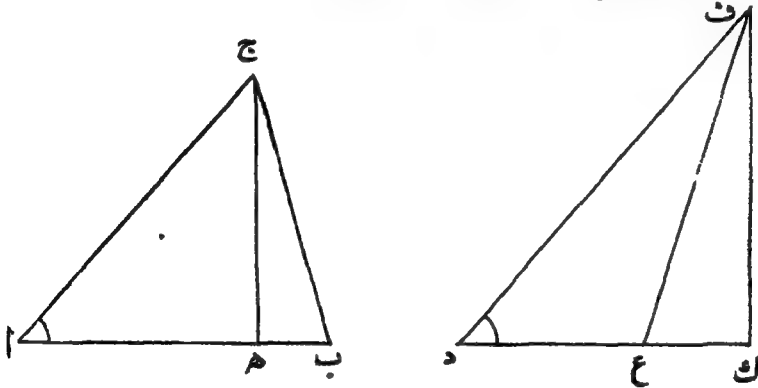
(۹) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ و ہے۔ د ا و ب و ج و د و ع کو بالترتیب نقاط ا ب ج د ع پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع دے ہوئے کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے متشابه ہے۔

(۱۰) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ ہے اور و ایسا دعوہ ہے کہ کوئی نقطہ ا لیا گیا ہے۔ ا ب ا ب ج ج د د ع بالترتیب ا ب ج ج د د ع کے

متوازی کھینچے گئے ہیں جو دب، وج، ود، وع سے بالترتیب ب، ج، د، ع پر ملتے ہیں۔ ا، ع کو طایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کے متشابه ہے۔
(۱۰) ثابت کرو کہ مخروط مصلع کی کوئی 'مستوی تراشش جو قاعدہ کے متوازی ہو قاعدہ کے متشابه ہوتی ہے۔

(۱۱) متشابه مشترک المحيط شکلوں کے حالت دائرہ کے قطر نظیر کے ضلعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۴۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان مثلثوں کے رقبے مساوی زاویوں کے گروہ کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔



مثلث ا، ب، ج کا زاویہ ا مثلث د، ع، ف کے زاویہ د کے مساوی ہے

$$\text{ثابت کرنا ہے کہ } \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ د ع ف}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج}}{\text{د ع} \times \text{ف}}$$

ج سے ا، ب پر عمود جھ اور ف سے د، ع پر عمود فک نکالو
مثلثات ج ا ہ، ف د ک متشابه ہیں

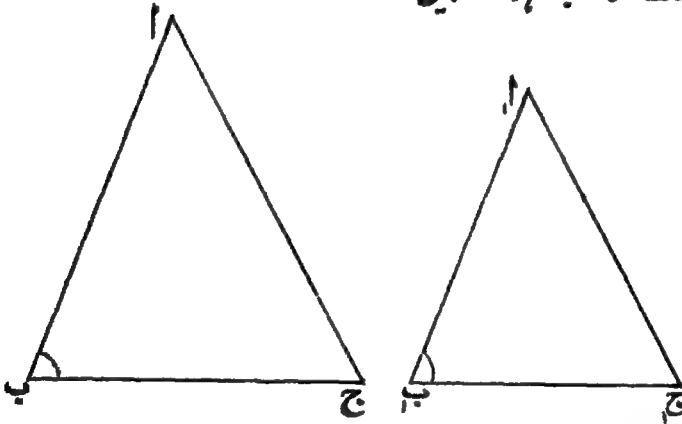
$$\text{اس لیے } \frac{\text{ج ا}}{\text{ف د}} = \frac{\text{ج ہ}}{\text{ف ک}}$$

$$\Delta \text{ ا ب ج } = \frac{1}{4} \text{ ا ب } \times \text{ ج ه}$$

$$\Delta \text{ د ع ف } = \frac{1}{4} \text{ د ع } \times \text{ ف ك}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ د ع ف}} = \frac{\text{ا ب } \times \text{ ج ه}}{\text{د ع } \times \text{ ف ك}} = \left[\text{کیونکہ } \frac{\text{ج ه}}{\text{ف ك}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}} \right]$$

نوٹ - اس مسئلہ کا متبادل ثبوت دفعہ ۲۷ مثال ۲ کے نتیجہ کی مدد سے حاصل ہو۔
 نتیجہ صریح - اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔
 ۳۲ - مسئلہ - متشابہ مثلثوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات ا ب ج اور ا ب ج، متشابہ ہیں۔

$$\text{ثابت کرنا ہے کہ } \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا ب}^2}$$

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج، متشابہ ہیں اس لیے $\text{ا ب} = \text{ا ب}$

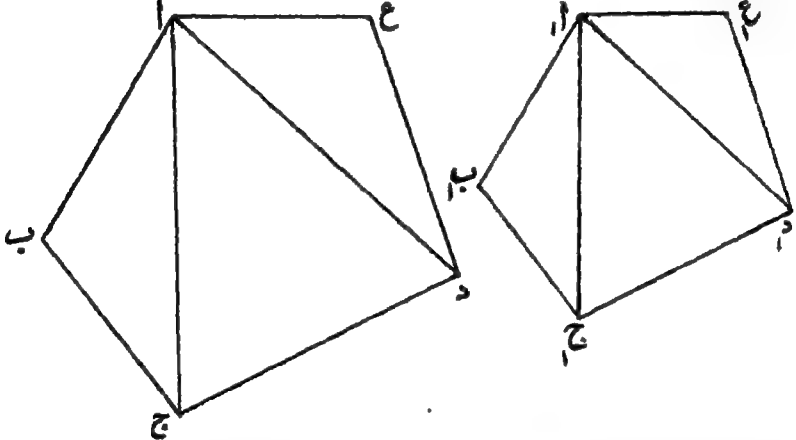
$$\text{اور } \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\frac{ا ب \times ج}{ا ب \times ج} = \frac{\triangle ا ب ج}{\triangle ا ب ج} \quad ا ب$$

$$= \frac{ا ب}{ا ب} \times \frac{ا ب}{ا ب} \quad \text{بموجب (۱)}$$

$$= \frac{ا ب^2}{ا ب^2} \quad \text{جو ثابت کرنا تھا۔}$$

مسئلہ ۳۳۔ متشابه کثیر الاضلاعوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے تناسب ہوتے ہیں۔



کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع متشابه ہیں
 ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}} = \frac{ا ب^2}{ا ب^2}$
 ا ج، ا د اور ا ج، ا د کو ملاؤ۔

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متشابه ہیں

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\triangle ا ب ج}{\triangle ا ب ج} = \frac{ا ب^2}{ا ب^2} \quad \text{--- (۱)}$$

نیز چونکہ مثلثات ا ج د اور ا ج د متشابه ہیں

اس لیے $\frac{\Delta ا ج د}{\Delta ا ج د} = \frac{ج د}{ج د}$ (۲)

نیز چونکہ مثلثات ا د ع اور ا د م ع متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\Delta ا د ع}{\Delta ا د م ع} = \frac{د ع}{د م ع}$ (۳)

چونکہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د م ع متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ع}{د م ع}$

اس لیے $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ع}{د م ع}$ (۴)

نتیجہ (۱) (۲) (۳) (۴) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج} = \frac{\Delta ا ج د}{\Delta ا ج د} = \frac{\Delta ا د ع}{\Delta ا د ع}$$

$$\frac{\Delta ا ب ج + \Delta ا ج د + \Delta ا د ع}{\Delta ا ب ج + \Delta ا ج د + \Delta ا د ع} =$$

$$= \frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا ب ج د م ع کا رقبہ}}$$

یہی ثابت کرنا تھا۔

مشکل

- (۱) مثلث ا ب ج میں اضلاع ا ب، ا ج کے وسطی نقطے د اور ع ہیں۔ ثابت کرو کہ $\Delta ا د ع$ کا رقبہ مخروط د ب ج ع کے رقبہ کا $\frac{۱}{۴}$ ہے۔
- (۲) ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کا کونسا حصہ ہے؟ (جواب $\frac{۱}{۴}$ حصہ)
- (۳) مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لاھا اس طرح

کھینچو کہ \triangle الا ما کا رقبہ منفر \triangle اب ما ج کے رقبہ کا $\frac{1}{9}$ ہے۔

[اشارہ - الا: اب = ۴:۳]

(۴) مثلث اب ج میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ا د عمود ہے ب ج پر۔
ثابت کرو کہ \triangle ب ا د : \triangle ا ج د = اب : ا ج

(۵) متشابه مشترک محیط شکلوں کے رقبے ان کے حاطہ دائروں کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۶) ایک دائرہ کے اندر بنے ہوئے منتظم سدس کا رقبہ اس دائرہ کے گرد بنے ہوئے منتظم سدس کے رقبہ کا $\frac{3}{4}$ ہے۔

(۷) منفر اب ج د کے اضلاع اب، ج د باہم متوازی ہیں۔ ا ج اور ب د ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں۔ اگر اب : ج د = ۳ : ۲ تو مثلثات و اب اور ج د کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔ (جواب $\frac{9}{4}$)

(۸) مثلث اب ج میں \angle ا = ۹۰° اور ب ج اور ج ف بالترتیب اضلاع ا ج، اب پر عمود ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ج ف کا رقبہ مثلث اب ج کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ متشابه مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہے جو

(۱) متناظر ارتفاعوں کے مربعوں میں ہے

(۲) متناظر وسطانیوں کے مربعوں میں ہے

(۳) اندرونی دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے

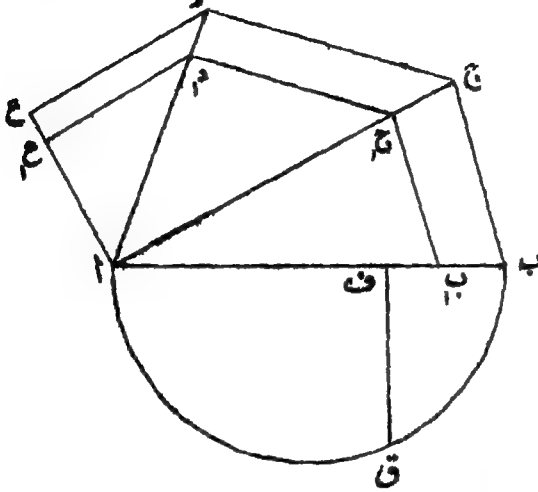
(۴) حاطہ دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے۔

۳۴ - مسئلہ علی - ایک کثیر الاضلاع بنا نا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابه ہو اور جس کے رقبہ کو دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ ایک معلومہ نسبت م : ن ہو۔

فرض کرو کہ دیا جا کثیر الاضلاع اب ج د ع ہے اب پر نقطہ ف ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{اف}{اب} = \frac{م}{ن}$$

اب قطر پر دائرہ کھینچو اور ف سے اب پر عمود ف ق کھینچو جو دائرہ سے ق پر ملے۔



اب پر نقطہ دہ ایسا معلوم کرو کہ ابم = اق
اب پر ایک شکل اب ج د م ع بناؤ جو دی ہوئی شکل اب ج د ع کے متشابه ہو۔ تب شکل اب ج د م ع مطلوبہ شکل ہوگی۔

کیونکہ

$$\frac{\text{شکل اب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل اب ج د ع کا رقبہ}} = \frac{\text{اب}'}{\text{اب}} = \frac{\text{اق}'}{\text{اب}} = \frac{\text{اب} \times \text{اق}}{\text{اب}^2}$$

$$\frac{\text{اق}}{\text{اب}} = \frac{\text{اق}'}{\text{اب}'} = \frac{\text{اق}}{\text{اب}}$$

۳۵۔ مسئلہ عملی - ایک کثیرالاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیرالاضلاع ش کے متشابه ہو اور رقبہ میں ایک آہر دیے ہوئے کثیرالاضلاع ع کے مساوی ہو۔

اشکال ش اور ع کو مربعوں میں تبدیل کرو۔
فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعوں کے طول بالترتیب ل اور ل ہیں اگر شکل ش کا ایک ضلع اب ہو تو ایک خط اب ایسا معلوم کرو کہ

$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ل}{ل}$ اور ا ب پر ایک شکل ا ب ج د ع ...
 بناؤ جو شکل ش کے متشابه ہو اور جن میں ا ب اور ا ب تناظر ضلع ہوں
 تب ا ب ج د ع مطلوبہ شکل ہوگی
 کیونکہ شکل ا ب ج د ع ... کا رقبہ = $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ل}{ل}$ = شکل ع کا رقبہ
 اس لیے شکل ا ب ج د ع ... کا رقبہ = شکل ع کا رقبہ

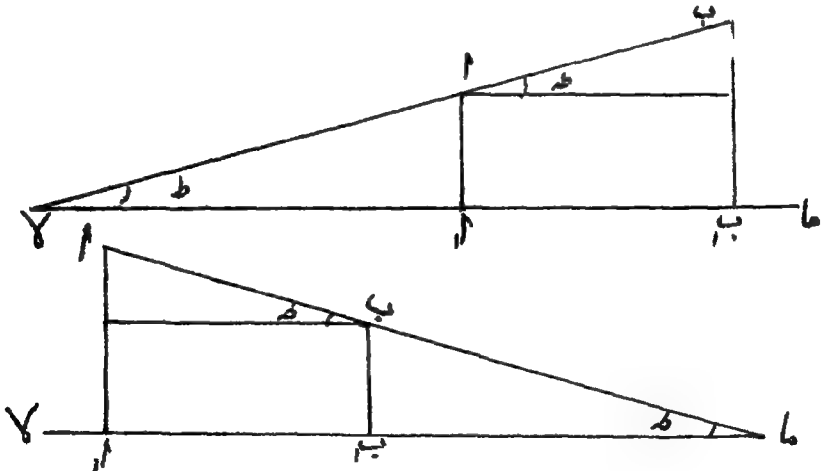
امثلہ

- (۱) ایک مساوی الاضلاع مثلث بناؤ جو رقبہ میں ایک دیے ہوئے مثلث کے مساوی ہو۔
- (۲) ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔
- (۳) ایک مثلث بناؤ جس کے اضلاع ۴ : ۵ : ۷ کے تناسب ہوں اور جس کا رقبہ ۵ مربع انچ ہو۔
- (۴) ذرا ربعة الاضلاع ا ب ج د بناؤ جس میں ا ب = ۴ سمر، ب ج = ۵ سمر، ج د = ۳ سمر اور د ا = ۱ سمر اس کے متشابه ایک ذرا ربعة الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۲ ضلع پر کے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔
- (۵) ایک شکل معین بناؤ جس کا ایک زاویہ ۶۰° کا ہو اور جس کا رقبہ ۲ ضلع پر بنے ہوئے متطلم مسدس کے رقبہ کے مساوی ہو۔
- (۶) ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا رأسی زاویہ ۵۰° کا ہو اور جس کا رقبہ اُس مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو جس کے اضلاع ۲، ۳، ۵، ۳، ۵ ہیں۔

تیسرا باب

مثلث کے خواص

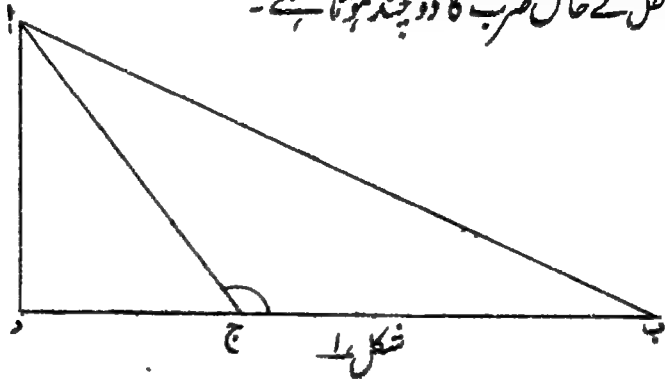
۳۶۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط AB کے سروں A اور B سے ایک معلومہ خط AM پر عمود AN ، B سے نکالے جائیں تو محدود خط AB معلومہ خط AM کا ظل کہلاتا ہے خط AM پر۔



اگر AB اور AM کا درمیانی حادہ زاویہ θ ہو تو AN کا طول مساوی ہوگا $AB \times \sin \theta$

۳۷۔ مسئلہ۔ (فیتاغورث کے مسئلہ کی توسیع)

کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع بڑا ہوتا ہے، مساوی ہوتا ہے، چھوٹا ہوتا ہے باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بوجہ اس کے کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو، قائمہ ہو یا حادہ ہو اور غیر مساوی ہونے کی صورت میں ان کا فرق دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس ضلع پر دوسرے ضلع کے ظل کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔



صورت اول۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ منفرجہ ہے۔
۱۔ سے B ج مدوہ پر عمود AD نکالو تب ج د ظل ہے ج ا کا خط
B ج پر۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$
قائم الزاویہ مثلث ABC میں

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC - CD)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

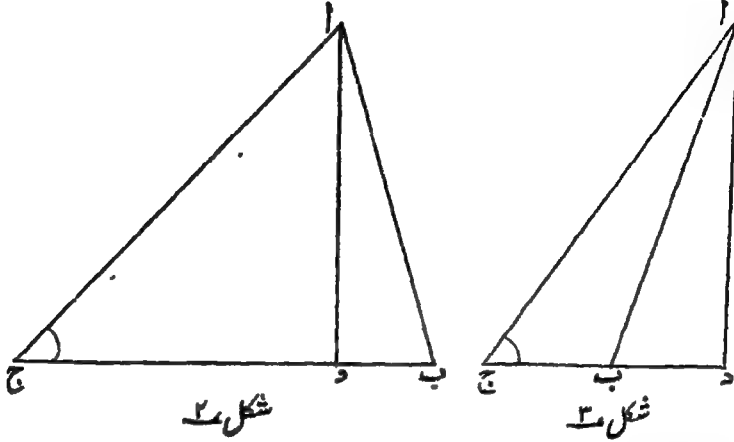
(کیونکہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ قائمہ ہے)

صورت دوم۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ حادہ ہے۔

۱۔ سے B ج پر عمود AD نکالو

تب ج د ظل ہے ج ا کا خط B ج پر

یہ ثابت کرنا ہے کہ $ا ب^۲ = ب ج^۲ + ج ا^۲ - ۲ ب ج \times د ج$ ۔



قائم الزاویہ مثلث ا ب د میں

$$ا ب^۲ = ا د^۲ + د ب^۲ = (ب ج - ج د)^۲ + ا د^۲$$

$$= ا د^۲ + ب ج^۲ - ۲ ب ج \times ج د + ج د^۲$$

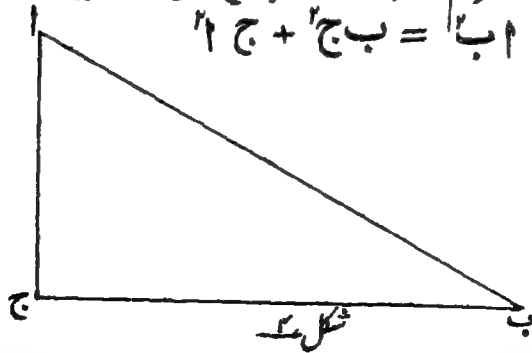
$$= ب ج^۲ + ا د^۲ + ج د^۲ - ۲ ب ج \times ج د$$

$$= ب ج^۲ + ج ا^۲ - ۲ ب ج \times د ج$$

[کیونکہ مثلث ا ج د میں $د ج > د قائمہ$ ہے]

صورت سوم۔ اگر مثلث ا ب ج میں $ج > ج قائمہ$ ہو تو

$$ا ب^۲ = ب ج^۲ + ج ا^۲$$



یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے اور طالب علم اس کے ثبوت سے پہلے ہی سے

واقف ہے۔ ان تینوں صورتوں کو طائفے سے مسئلہ دفعہ ہذا ثابت ہوا۔

۳۸۔ دفعہ گذشتہ کی صورت اول میں

$$\begin{aligned} \text{ج د} &= \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج د} \times \text{ج ا} \\ &= \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج د} \times \text{ج ا} \end{aligned}$$

اس لیے صورت اول کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا + ج د = ج د × ج ا

ہو جاتا ہے ا ب ا = ب ج + ج ا + ج د = ج د × ج ا + ج د × ج ا + ج د × ج ا = ج د × ج ا × ۳

دفعہ گذشتہ کی صورت دوم میں

$$\begin{aligned} \text{ج د} &= \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج د} \times \text{ج ا} \\ &= \text{ج ا} \times \text{ج د} = \text{ج د} \times \text{ج ا} \end{aligned}$$

اس لیے صورت دوم کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا + ج د = ج د × ج ا

ہو جاتا ہے ا ب ا = ب ج + ج ا + ج د = ج د × ج ا + ج د × ج ا + ج د × ج ا = ج د × ج ا × ۳

اس لیے صورت سوم کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا + ج د = ج د × ج ا

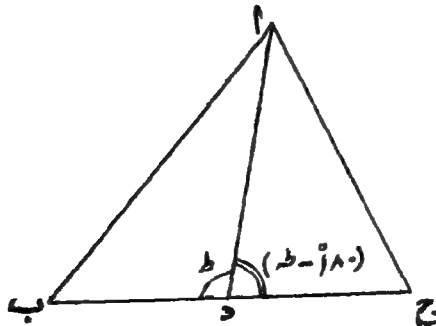
۳۹۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج میں د ایک وسطانیہ ہو تو

شکل ج ا = ج ا + ج ا + ج ا = ج د × ج ا

درست ہے خواہ ج حادہ ہو یا قائمہ یا منفرجہ

۳۹۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج میں د ایک وسطانیہ ہو تو

$$\text{ا ب ا} + \text{ج ا} = \text{ج ا} + \text{ج ا} + \text{ج ا} = \text{ج د} \times \text{ج ا}$$



ثلث ا ب د میں فرض کرو کہ $\angle ا د ب = ط$

اس لیے $\angle ا د ج = ۹۰ - ط$

تب $ا ب^۲ = ا د^۲ + د ج^۲ - ۲ ا د د ج \times \cos ط$ (۱)

نیز $ا ج^۲ = ا د^۲ + د ج^۲ - ۲ ا د د ج \times \cos (۹۰ - ط)$

$$= ا د^۲ + د ج^۲ + ۲ ا د د ج \times \sin ط$$

(۲) $ا د^۲ + د ج^۲ + ۲ ا د د ج \times \sin ط = ا ب^۲ + د ج^۲ - ۲ ا د د ج \times \cos ط$ (۱) اور (۲) سے

$$ا ب^۲ + ا ج^۲ = ۲ ا د د ج + ۲ د ج^۲$$

جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث ا ب ج میں $\angle ج = ۹۰$ ° تو ثابت کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + د ج^۲ - ا ب^۲$

اور اگر $\angle ج = ۱۲۰$ ° تو ثابت کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + د ج^۲ + ا ب^۲$

(۲) مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج پر کوئی نقطہ لاے۔ اگر اس نقطہ لا

پر منطبق ہو جائے تو دفعہ ۳۷ کی مدد سے ثابت کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + د ج^۲ + ا ب^۲$

(۳) مثلث ا ب ج میں $ا ج = ۲۱$ ، $ا ب = ۲$ اور $\angle ج = ۵$ °

(جواب $\angle ا = ۹۰$ °)

(۴) ایک مثلث کے اضلاع ۸، ۹، ۱۰ سم ہیں اس کے خطوط وسطی کے طول معلوم کرو۔

$$[\text{جواب } \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2} \text{ سم}]$$

(۵) ایک مثلث کے خطوط وسطی کے طول ل، م، ن ہیں۔ اضلاع کے طول محسوب کرو۔

$$[\text{جواب } \frac{1}{2} (ل^۲ + م^۲ + ن^۲ - ل^۲ - م^۲ - ن^۲)]$$

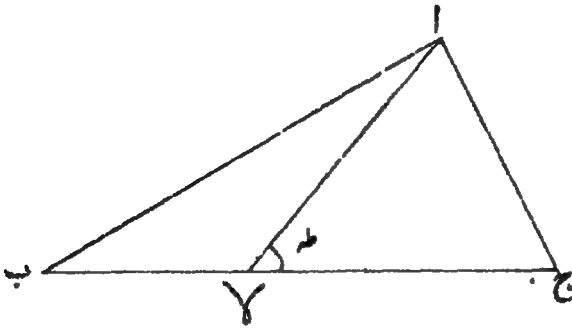
(۶) ایک متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں

پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۷) کسی ذواربہ الاضلاع میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ متقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط پر کے مربعوں کے مجموعہ کا دو چند ہوتا ہے۔

(۸) مثلث ABC کے خطوط وسطی کا نقطہ تراکز O ہے، ثابت کرو کہ
 $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

(۹) مثلث ABC میں B پر نقطہ L ایسا ہے کہ $BL \times BC = AL \times AC$ ثابت کرو کہ $m \times AB^2 + n \times AC^2 = (m+n) \times AL^2$
 (۱۰) پولونی شس کا مسئلہ



[آفادر - فرض کرو کہ $AL > LC$]

(۱) $AB^2 = AL^2 + BL^2 + 2 \cdot BL \cdot LO$ (۱)

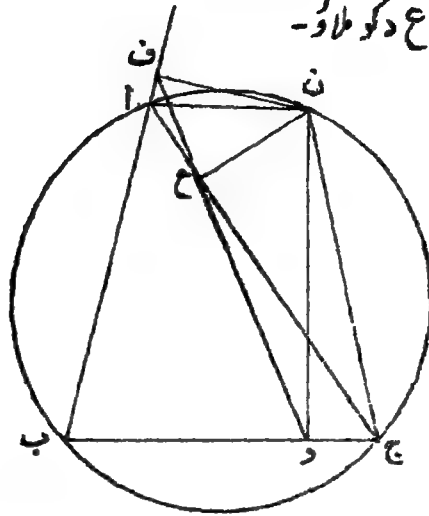
(۲) $AC^2 = AL^2 + LC^2 - 2 \cdot LC \cdot LO$ (۲)

(۱) کو m سے اور (۲) کو n سے ضرب دے کر جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ مسئلہ دفعہ ۳۹ کی علم شکل ہے۔

۳۰۔ مسئلہ - (سمسن کا خط) ایک مثلث کے حائلہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو عمودوں کے پائین ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ABC کے حائلہ دائرہ پر کوئی نقطہ N ہے اور N سے مثلث کے اضلاع AB ، BC ، CA پر عمود بالترتیب D ، E ، F نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ نقاط D ، E ، F

ہم خط ہیں۔
ف ع، ع د کو ملاؤ۔



چونکہ $\angle FAN = \angle EAC =$ قائمہ

اس لیے نقاط 'ن'، 'ف'، 'ا'، 'ع' مشترک محیط ہیں۔

اس لیے $\angle FAN = \angle EAC = \angle FAN = \angle EAC$

(کیونکہ نقاط 'ن'، 'ا'، 'ب'، 'ج' مشترک محیط ہیں)۔

نیز $\angle EAC = \angle EAC = \angle EAC =$ قائمہ

اس لیے نقاط 'ن'، 'ع'، 'د'، 'ج' مشترک محیط ہیں۔

اس لیے $\angle EAC = \angle EAC = \angle EAC =$

یعنی $\angle EAC = \angle EAC = \angle EAC =$

یعنی 'ف'، 'ع'، 'د' خط مستقیم ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ خط 'د'، 'ع'، 'ف' کو مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے لحاظ سے حالت دائرہ پر

نقطہ 'ن' کا خط 'پاکین' یا 'سمسن' خط کہتے ہیں۔

مثلاً

(۱) (۱) ایک نقطہ 'ق' سے مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں۔

اگر عمودوں کے پائین خط مستقیم میں ہوں تو ثابت کرو کہ ق، مثلث ا ب ج کے حاطط دائرہ پر ہے۔
 (ب) اگر نقطہ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کے پائین خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں تو ق کا طریق معلوم کرو۔
 (۲) مثلث ا ب ج کے حاطط دائرہ پر کسی نقطہ ن سے ب ج پر عمود ن د نکالا گیا ہے اور یہ حاطط دائرہ سے مکرر ن پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا خط پائین ان کے متوازی ہے۔

(۳) کسی مثلث کے حاطط دائرہ پر کسی دو نقطوں ن اور ق کے ممس خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی دائرہ پر بننا۔
 (۴) اگر چار خطوط مستقیم کے تقاطعات سے جن میں سے کوئی دو باہم متوازی نہ ہوں چار مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے چاروں حاطط دائرہ ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۵) کسی نقطہ کا ممس خط نقطہ مذکور کو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

۲۱۔ مسئلہ۔ (نو نقطی دائرہ)۔ کسی مثلث میں اضلاع کے وسطی نقطہ، راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور مثلث کے عمودی مرکز کو راسوں سے ملانے والے خطوں کے وسطی نقطے مشترک محیط ہوتے ہیں۔
 فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے بالترتیب د، ع، ف ہیں۔

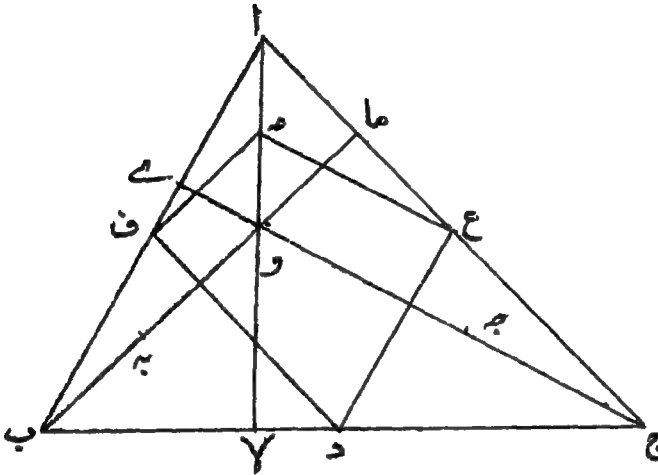
اور راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین بالترتیب لا، ما، بے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ان عمودوں کا نقطہ تراکز یعنی مثلث کا عمودی مرکز وہ ہے اور ا، ب، ج د کے وسطی نقطے بالترتیب ع، بے، جہ ہیں۔

پہلے ہم ثابت کریں گے کہ ع، بے، جہ مشترک محیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔

چونکہ د اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ب ج اور ا ب کے

اس لیے دف // ا ج



نیز چونکہ ا د ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ا و اور اب کے
اس لیے ا د ف // با ما
اس لیے د ف اور ا د ف کا درمیانی زاویہ مساوی ہے ا ج اور ب ما کے
درمیانی زاویہ کے جو کہ قائمہ ہے

$$\therefore \angle د ف ا = قائمہ$$

$$\text{اسی طرح } \angle د ع ا = قائمہ$$

اس لیے نقطہ ا نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک محیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقاط ب، ا درجہ بھی مشترک محیط ہیں
د، ع، ف کے ساتھ۔

پس ثابت ہوا کہ ا، ب، جہ مشترک محیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔
اب ہم ثابت کریں گے کہ نقاط ک، م، ا، ب بھی مشترک محیط ہیں
د، ع، ف کے ساتھ۔

چونکہ $\angle ا د ک$ قائمہ ہے اور نیز $\angle ا د ف$ بھی قائمہ ہے۔
اس لیے نقاط ا، د، ک، ف مشترک محیط ہیں۔

یعنی نقطہ لا نقاط ع' ف' د میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہے
لیکن نقاط ع' ف' د میں سے گزرنے والا دائرہ نقاط د' ع' ف' میں سے
گزرنے والا دائرہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ نقطہ لا نقاط د' ع' ف' کے ساتھ مشترک محیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقاط ما اور مے بھی نقاط د' ع' ف'
کے ساتھ مشترک محیط ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ لا' ما' مے مشترک محیط ہیں د' ع' ف' کے ساتھ۔
پس ثابت ہوا کہ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطے، رأسوں سے
مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور رأسوں کو مثلث کے عمودی مرکز سے
جانے والے خطوط کے وسطی نقطے مشترک محیط ہوتے ہیں۔

تقریص: کسی مثلث کے مندرجہ بالا نو نقطوں میں سے گزرنے والے
دائرہ کو مثلث کا نو نقطی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو نو نقطی مرکز کہتے ہیں۔
۳۲۔ مسئلہ۔ کسی مثلث میں (۱) نو نقطی مرکز، حائل مرکز اور
عمودی مرکز کو جانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر مثلث کے حائل دائرہ کے نصف قطر کے مساوی
ہوتا ہے۔

نیز (۳) ہندسی مرکز ہم خط ہوتا ہے حائل مرکز، نو نقطی مرکز اور عمودی مرکز کے ساتھ۔
فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائل مرکز س ہے، عمودی مرکز د ہے
اور نو نقطی مرکز ن ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ (۱) نقطہ ن خط س و کا نقطہ تنصیف ہے
اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر حائل دائرہ کے نصف قطر س ا کے مساوی ہے
اور نیز (۳) مرکز ثقل خط س و پر ہے۔

(۱) دفعہ گذشتہ کی ترقیم کے مطابق چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط د اور لا
میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے نو نقطی مرکز د لا کے عمودی منصف پر ہوگا۔
اسی طرح سے نو نقطی مرکز صاع کے عمودی منصف پر بھی ہوگا۔

فرض کرو کہ وسطانیہ ا د خط س و سے ٹ پر ملتا ہے
اب متشابه مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س میں

$$\frac{اٹ}{دٹ} = \frac{ا د}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

اس لیے وسطانیہ ا د کی داخلی تقسیم نسبت ۱:۲ میں ٹ پر ہوتی ہے۔
اس لیے ٹ مثلث ا ب ج کا ہندسی مرکز (مرکز ثقل) ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا (۳) میں متشابه مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س سے
حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{وٹ}{ٹ س} = \frac{ا د}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

یعنی مثلث کا مرکز ثقل د ٹ، عمودی مرکز و اور عائلہ مرکز س کو ملانے والے
خط کی داخلی تقسیم نسبت ۱:۲ میں کرتا ہے۔

امثلہ

(۱) دفعہ ۳۱ کے مسئلہ کو استعمال کرنے کے بغیر اسی دفعہ کی ترقیم کے مطابق
ثابت کرو کہ

(ا) لا مشترک محیط ہے ع، ب، ج کے ساتھ

(ب) د مشترک محیط ہے ع، ب، ج کے ساتھ

(ج) ع مشترک محیط ہے لا، ما، مے کے ساتھ

(د) د مشترک محیط ہے لا، ما، مے کے ساتھ

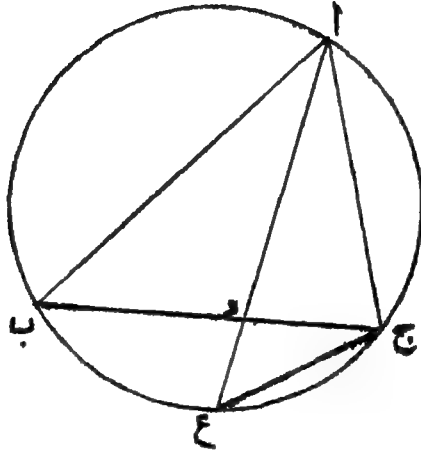
(۲) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع ف د جہ مستطیل ہے۔

(۳) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع د = ب ع = جہ ف

(۴) ثابت کرو کہ ترقیم سابقہ کے مطابق ا د اور ع م ایک دوسرے کی
تقسیم کرتے ہیں۔

- (۵) معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ $۱۰ = ۲۰$ جم ۱
- (۶) ایک مثلث کا قاعدہ اور اسی زاویہ دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کے نقطہ مرکز کا طریق معلوم کرو۔
- (۷) مثلث ABC کے جانبی دائروں کے مرکز E, F, G ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ABC کا حائط دائرہ مثلث EFG کا لونیقی دائرہ ہے اور اس سے حاصل کرو کہ مثلث ABC کا حائط دائرہ مثلث EFG کے اضلاع کی تقصیف کرتا ہے۔
- (۸) مثلث ABC کا عمودی مرکز وہ ہے ثابت کرو کہ مثلث ABC کا لونیقی دائرہ مثلثات AOB, BOG, COA کا بھی لونیقی دائرہ ہے۔
- (۹) مثلث کا ایک رأس اور لونیقی دائرہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- (۱۰) ایک مثلث کا ایک رأس عمودی مرکز اور لونیقی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں۔ مثلث بناؤ۔
- (۱۱) ایک مثلث کے دو رأسی اور لونیقی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں مثلث بناؤ۔
- (۱۲) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مثلث پائین کا ایک ضلع اور ایک زاویہ مستقل ہیں۔
- مسئلہ - مثلث ABC کے زاویہ A کا اندرونی قاعدہ BC سے دہرائے تو
- $AB \times AC = AD^2 + DB \times DC$
- مثلث ABC کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ AD محدودہ حائط دائرہ سے E پر ملتا ہے۔ BC کو EA ۔
- مثلثات ABD اور ACE میں
- $\angle ABD = \angle ACE$
- $\angle BAD = \angle CAE$
- ∴ مثلثات ABD اور ACE ج متشابه ہیں۔

$$\frac{ab}{ca} = \frac{ad}{dc}$$



$$\therefore ab \times ad = ca \times dc$$

$$ad (ad + dc) =$$

$$ad^2 + ad \times dc =$$

$$ad^2 + bd \times dc =$$

[کیونکہ وتر AC اور BD ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں]۔

پس مسئلہ ثابت ہوا

مشق۔ اگر $a > b$ کا بیرونی نصف B ج محدودہ سے د پر ملے

$$\text{تو ثابت کرو کہ } ab \times ac = bd \times dc + ad^2$$

نوٹ:- اگر دفعہ بالا کی شکل میں $ab = ac$ تو $ab^2 = ad \times ac$ ۔

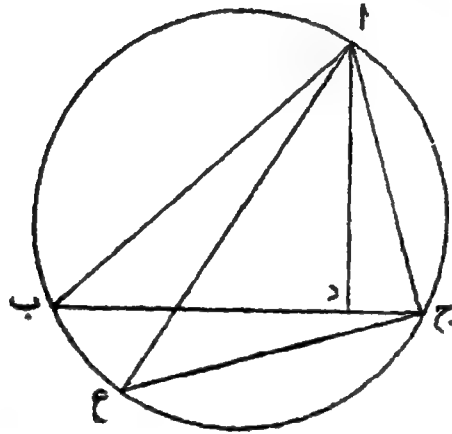
اس نتیجہ کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ اگر مثلث متساوی الساقین ABC کے راس A میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو قاعدہ یعنی محدودہ خط B ج سے

د پر احد حاطہ دائرہ سے ع پر ملے تو

$$ab^2 = ad \times ac$$

۴۴۔ اگر مثلث ABC کے راس A سے B ج پر عمود AD ہو

اور اے مثلث ا ب ج کے حاطط دائرہ کا قطر ہو تو $ا ب \times ج = ا ج \times ا د = ا د \times ا ع$
ج ع کو ملاؤ
مثلثات ا ب د اور ا ع ج میں



$ا ب د = ا ع ج$ (کیونکہ یہ ایک ہی قوس کے اندر کے زاویے ہیں)
اور $ا د ب = ا ج ع$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات ا ب د اور ا ع ج متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا د}{ا ع}$$

اس لیے $ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع$ ۔ جو ثابت کرنا تھا۔
نوٹ:- اگر عمود ا د کو ع سے تعبیر کیا جائے تو معمولی ترقیم کے مطابق
اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

ب \times ج = $ا د \times ع$ جہاں $ا د$ حاطط دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\text{نیز چونکہ مثلث ا ب ج کا رقبہ } \Delta = \frac{ا د \times ج}{۲}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\Delta}{ا د} = ج$$

ع کی اس قیمت کو اوپر کے نتیجہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب ج} = \frac{\Delta^2}{9} \times ۱۲$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\Delta^2} = \text{یعنی حائلہ دائرہ کا نصف قطر س}$$

(مقابلہ کرو دفعہ ۲۴ نتیجہ ۳ سے)

امثلہ ۱۱

(۱) مثلث ا ب ج کے Δ کا داخلی ناصف قائمہ ب ج سے د پر ملتا ہے۔ ا د کا طول محسوب کرو۔

$$\text{معمولی ترقیم کے مطابق ب د} = \frac{\text{ج د}}{\text{ب ج}} \text{ اور د ج} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب ج}}$$

$$\text{ازروئے دفعہ ۲۳ ب ج} = \text{ا د} + \text{ب د} \times \text{د ج}$$

$$= \text{ا د} + \frac{\text{ب د}^2}{(\text{ب ج})}$$

$$\text{اس لیے ا د} = \text{ب ج} - \left[\frac{\text{ب د}^2}{(\text{ب ج})} - ۱ \right] = \text{ب ج} - \frac{(\text{ب ج} + \text{د ج})(\text{ب ج} - \text{د ج})}{(\text{ب ج})}$$

اگر مثلث کے محیط یعنی $\text{ا د} + \text{ب ج} + \text{د ج}$ کو س سے تعبیر کیا جائے

$$\text{تو ا د} = \frac{\text{ب ج} \times \text{س} - (\text{س} - \text{ب ج})(\text{س} - \text{د ج})}{(\text{ب ج})}$$

$$= \frac{\text{ب ج} \times \text{س} - (\text{س} - \text{ب ج})(\text{س} - \text{د ج})}{(\text{ب ج})}$$

$$= \frac{\text{ب ج} \times \text{س} - (\text{س} - \text{ب ج})(\text{س} - \text{د ج})}{(\text{ب ج})} = \frac{1}{2} \text{ کیونکہ جم } \frac{1}{2}$$

(۲) اگر مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا خارجی نصف ب ج سے د پر ملے تو

$$\text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{2 \text{ ب ج}}{\text{ج نہ ب}} \times \text{جب} = \frac{1}{2}$$

(۳) مثلث بناؤ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب معلوم ہیں۔

(۴) مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز م ہے اور ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز ہے۔ م سے مے ضلع ب ج سے د پر اور مائٹ دائروں سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا د} \times \text{ا ف} = \text{ا م} \times \text{ا م} \quad (۵) \triangle \text{ ا ب ج میں ا ب محل اور ضلع ب ج پر نقطہ د اس طرح لیا گیا کہ}$$

$$\text{ا ب} \times \text{ا ج} = \text{ا د} + \text{ب د} \times \text{د ج}$$

ثابت کرو کہ ا د زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

فرض کرو کہ ا د مثلث ا ب ج کے مائٹ دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔

(دیجیو شکل دفعہ ۴۲)

$$\text{تب} \quad \text{ا د} + \text{ب د} \times \text{د ج} = \text{ا د} + \text{ا د} \times \text{د ج} = \text{ا ج} \times \text{ا د}$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{ا ب} \times \text{ا ج} = \text{ا د} \times \text{ا د}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ا ب}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ا ج}}$$

$$\text{اور} \quad \text{ا ب} > \text{ا د} = \text{ا ج} > \text{ا د}$$

اس لیے مثلث سوال کی رُو سے

$$\text{یا تو} \quad \text{ا ب} > \text{ا د} = \text{ا ج} > \text{ا د} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{یا} \quad \text{ا ب} > \text{ا د} + \text{ا ج} > \text{ا د} = ۲ \text{ قاعدے} \dots \dots (۲)$$

اب ہم ثابت کریں گے کہ نتیجہ (۲) ممکن ہے

$$\text{اگر} \quad \text{ا ب} > \text{ا د} + \text{ا ج} > \text{ا د} = ۲ \text{ قاعدے}$$

$$\text{تو} \quad \text{ا ج} > \text{ا د} = \text{ا ج} > \text{ا د} = \text{ا ج} > \text{ا د} = \text{ا ج} > \text{ا د}$$

یعنی $ا ب = ا ج$ جو شرائط سوال کے خلاف ہے۔

اس لیے $> ا د ب = > ا ج ع$

اس لیے $> ب ا د = > ع ا ج$ یعنی ا د زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج میں $ا ب = ا ج$ 'قاعدہ ب ج یا ب ج عمودہ پر کوئی نقطہ دے' ثابت کرو کہ مثلثات ا ب د اور ا ج د کے حائط دائروں کے نصف قطر مساوی (۷) سوال ۱ میں اگر ا ب اور ا ج مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات

ا ب د اور ا ج د کے نصف قطروں کی نسبت ا ب : ا ج کے مساوی ہے۔

(۸) ایک ذواربۃ الاضلاع ا ب ج د دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔ دائرہ

پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ $ا ن \times ج ن = ب ن \times د ن$

(اشارہ - ن سے ا ج پر کا عمود = ن سے ب د پر کا عمود)

(۹) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دیے گئے ہیں۔ وہ مثلث بناؤ

جس کے اضلاع کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر ایک دیے ہوئے رقبہ والا مثلث بنایا

گیا ہے ثابت کرو کہ تینوں ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ کے وتر ا ب کا عمودی منصف قوس سے ج پر ملتا ہے اور

قوس ا ج ب پر کوئی نقطہ دے' ثابت کرو کہ $ا ج' = ا د \times د ب + د ج'$

اس کی مدد سے حاصل کرو کہ $ا د \times د ب$ بڑے سے بڑا ہوگا اگر نقطہ د فقط ج پر منطبق ہو۔

(۱۲) ا ب ج د ایک مشترک المحيط ذواربۃ الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ا ب \times ا د + ج ب \times ج د}{ا ج} = \frac{ب ا \times ب ج + د ا \times د ج}{ب د}$$

(۱۳) ا ب ج د ایک مشترک المحيط ذواربۃ الاضلاع ہے

اس کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ا ب' ب ج' ج د' د ا' پر

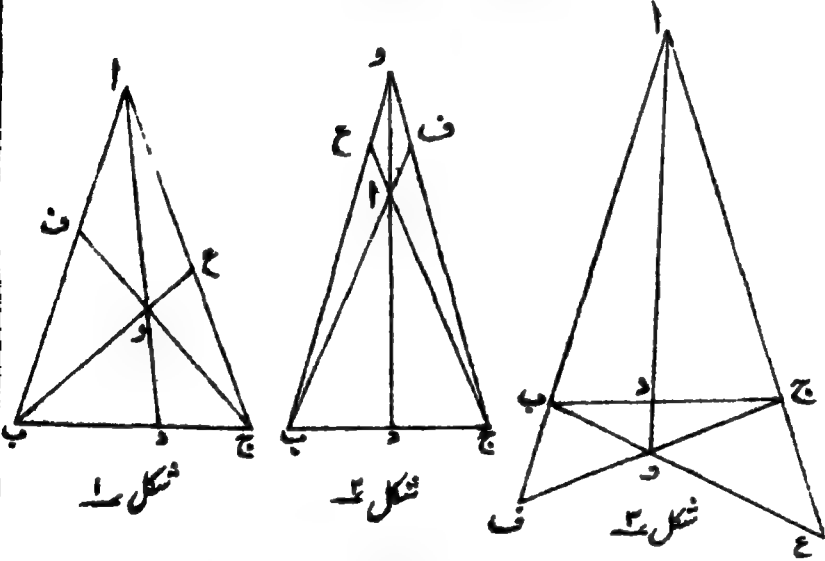
عمود نکالے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب ع' ع' ع' ع' ہیں اور اسی نقطہ ن

سے دتروں ا ج' ب د' پر کے عمودوں کے طول بالترتیب ع' ع' ہیں

ثابت کرو کہ $ع' ع' = ع' ع' = ع' ع'$

۴۵۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج کے رأسوں ا، ب، ج میں سے گزرنے والے متوازی خط مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملیں تو

$$\frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = ۱ +$$



فرض کر دو کہ ا د، ب ع، ج ف کا نقطہ ترازو و ہے۔
اگر نقطہ و مثلث کے اندر ہو [دیکھو شکل (۱۱)] تو تینوں نسبتیں

$$\frac{ب د}{د ج}، \frac{ج ع}{ع ا}، \frac{ا ف}{ف ب} \text{ ثابت ہیں۔}$$

اگر نقطہ و مثلث کے باہر ہو [دیکھو اشکال (۲) اور (۳)] تو مندرجہ بالا نسبتوں میں سے صرف ایک مثبت ہوگی اور باقی دو منفی۔
پس ہر صورت میں مندرجہ بالا تینوں نسبتوں کا حاصل ضرب مثبت ہوگا۔

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ا ب د}{د ج ا} = \frac{ا ب د}{د ج ا} = \frac{ا ب د}{د ج ا} \text{ (بوجہ دفعہ ۱۳ ب)}$$

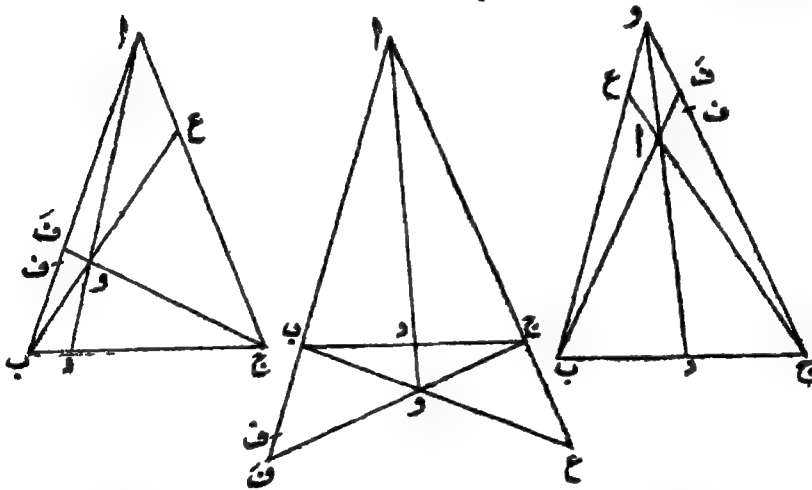
$$\frac{ج ع}{ع ا} = \frac{ا ب د}{د ج ا} \text{ اور } \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ا ب د}{د ج ا}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\Delta \text{ ا د ب}}{\Delta \text{ ا د ج}} \times \frac{\Delta \text{ ب و ج}}{\Delta \text{ ب و ا}} \times \frac{\Delta \text{ ج و ا}}{\Delta \text{ ج و ب}} = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

اس مسئلہ کا عکس :- اگر مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر بالترتیب نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$1 = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

تو خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہوں گے۔



فرض کرو کہ ا د اور ب ع کا نقطہ تقاطع و ہے نیز فرض کرو کہ ج و ضلع ا ب سے ف پر ملتا ہے۔

چونکہ ا د، ب ع، ج ف متراکز خط ہیں

$$\text{اس لیے } 1 = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

$$\text{لیکن بموجب مفروض } 1 = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

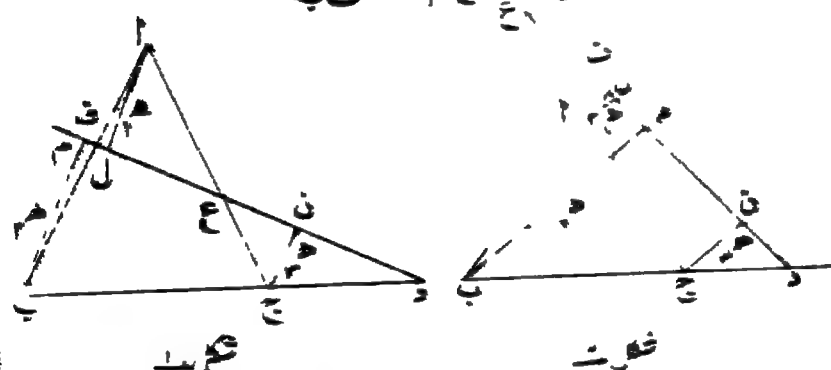
اس لیے $\frac{اف}{فب} = \frac{اف}{فب}$ ، بطریق غلطی اور علامت کے

میں یہ نقطہ ف نقطہ ف پر متعین ہے۔
پس ثابت ہو کہ نقطہ اد' ب' ع' ج' ف' مترکز ہیں۔

نوٹ - میں سہ کو میوا (Ceva) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

۴۶- مسئلہ - اگر ایک خط مستقیم شش' اب' ج' کے منسوع
ب' ج' ج' ا' اب' کو بہ ترتیب نقطہ د' ع' ف' پر قطع کرے تو

$$1 = \frac{ب' د'}{د' ج'} \times \frac{ج' ع'}{ع' ا'} \times \frac{ا' ف'}{ف' ب'}$$



تین مشکلات - ۱۔ نسوبہ د' ع' ف' اور یک منسوع کو خارجاً قطع کر کے [پنج گوشہ] یا تینوں ضلعوں کو خارجاً قطع کر کے [دو گوشہ] ۱۲

اس سے تین نسبتیں $\frac{ب' د'}{د' ج'} = \frac{ج' ع'}{ع' ا'} = \frac{ا' ف'}{ف' ب'}$ میں سے دو ثابت

اور ایک منقح ہوئی یہ تینوں سنی ہوئی۔

اس سے ہر سمت میں ۳ نسبتیں حاصل ضرب منقح ہو گا۔ اب نقطہ اب' ج' سے قاطع پر مائل ترتیب نمودن' ب' م' ج' ن' نکاو۔ در عرض ہو گا ان کے حوالہ بالترتیب ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲

متساویہ مشکلات سے بلا لحاظ درست کے حاصل ہو جاتے

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ا هـ}{هـ ج} ، \frac{ا هـ}{هـ ج} = \frac{ج ع}{ع ا} اور \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ب د}{د ج}$$

اس لیے صرف عددی قیمت کو ملحوظ رکھنے سے

$$1 = \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$

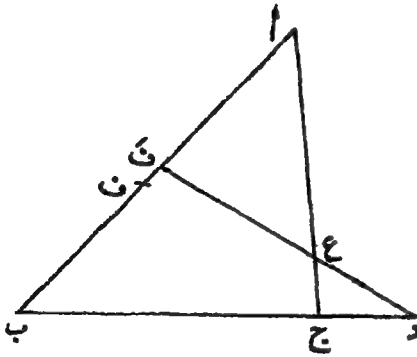
چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس حاصل ضرب کی علامت منفی ہے

$$1 = - \frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$

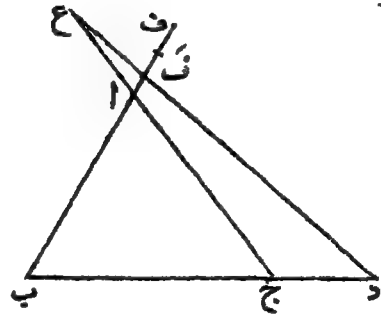
اس مسئلہ کا عکس :- اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$1 = - \frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$

تو نقاط د، ع، ف ہم خط ہوں گے۔



شکل ۱۔



شکل ۲۔

فرض کرو کہ د ع ضلع ا ب سے ف پر ملتا ہے
چونکہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں

$$1 = - \frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$

لیکن بموجب مفروض $1 = \frac{اف}{فب} \times \frac{ج ع}{ا ع} \times \frac{ب د}{د ج}$

اس لیے $\frac{اف}{فب} = \frac{اف}{فب}$ (بجائز مقدار اور علامت کے)

اس لیے نقطہ ف نقطہ ف پر منطبق ہے۔

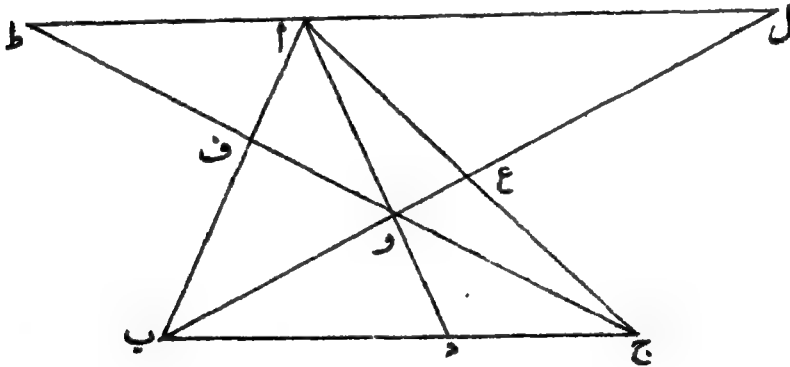
پس ثابت ہوا کہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو میدنی لاس (Menelaus) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مشکل ۱۲

(۱) سیوا کے مسئلہ کا متبادل ثبوت :-

مثلث ا ب ج کے رأسوں سے متکثر خطوط ا و، ب و، ج و کھینچے گئے ہیں جو متقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں اور



ا میں سے گزرنے والے اور ب ج کے متوازی خط سے ب ع اور ج ف بالترتیب ل اور ط پر ملتے ہیں۔

متشابه مثلثوں کی مدد سے $\frac{ا ط}{ب ج} = \frac{اف}{فب}$

اور $\frac{ا ل}{ب ج} = \frac{ا و}{و ج} \times \frac{ا ل}{و ا} = \frac{د و}{د ج} \times \frac{ب د}{د و} = \frac{ب د}{د ج}$

$$\text{اور } \frac{\text{ج ب}}{\text{ا ل}} = \frac{\text{ع ج}}{\text{ا ع}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ع ج}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ب ج}} \times \frac{\text{ا ل}}{\text{ط ا}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ل}} = 1$$

(۲) سیوا (Ceva) کے مسئلہ کی رو سے ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

(۱) خطوط وسطی متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمود متراکز ہوتے ہیں۔

(ج) اضلاع کے عمودی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(د) زاویوں کے اندرونی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ع) دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے کا داخلی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(۳) مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔ اس مسئلہ کا مثل مسئلہ جانبی دائروں کی صورت میں بھی بیان کرو اور ثابت کرو۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ع ف محدودہ ب ج سے ن پُر ف د محدودہ ا ج سے ق پر اور د ع محدودہ ا ب سے سر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط ن، ق، سر ہم خط ہیں۔

(۵) سوال ۴ میں ثابت کرو کہ ب ج کی موسیقی تقسیم د اور ن پر ہوتی ہے۔

(۶) ایک مثلث کے دو زاویوں کے اندرونی منصف اور تیسرے کا خارجی منصف مقابل کے اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کے خارجی ناصف مقابل کے اضلاع سے

جن تین نقطوں پر ملتے ہیں وہ نقطہ ہم خط ہیں۔

(۸) مثلث ا ب ج کے رأسوں ا، ب، ج پر محیط دائرہ کے ماس کھینچے

گئے ہیں اور وہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

نقاط ل' م' ن ہم خط ہیں۔ [اشارہ - $\frac{ب ل}{ج ل} = \frac{ب ن}{ج ن}$]

(۹) مثلث 'ب ج ے' نذر ایک نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ زاویوں 'ا و ب' ب و ج' ج و ا کے باقی نصف بالترتیب اضلاع 'ا ب' 'ب ج' 'ج ا' کے عین ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۱۰) تین متراکز حہ 'ا' 'ب' 'ج' ف مثلث 'ا ب ج' کے اضلاع 'ب ج' 'ج ا' 'ا ب' سے بالترتیب د' ع' ف' پر ملتے ہیں، اور ع' ف' د' ع' بالترتیب 'ب ج' 'ج ا' 'ا ب' سے 'ا' 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ نقاط 'ا' 'ب' 'ج' ہم خط ہیں نیز ثابت کرو کہ 'ب د ج' 'ا' ایک موسیقی صفت ہے۔

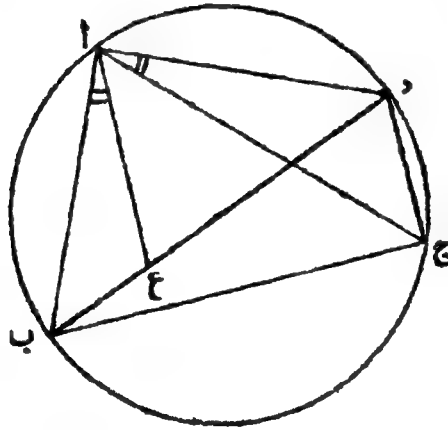
(۱۱) مثلث 'ا ب ج' نذر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ

جب و ب ج x جب و ج ا x جب و ا ب = جب و ج ب x جب و ب ا x جب و ا ج
اس نتیجہ کا عکس بیان کرو اور اس کو بھی ثابت کرو۔

چوتھا باب

دائرؤں کے خواص

۴۷۔ مسئلہ۔ ایک مشترک محیط ذو اربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے وترؤں کا حاصل ضرب مقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔



ا ب ج د ایک مشترک محیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے، ثابت کرنا ہے کہ
 $ا ج \times ب د = ا ب \times ج د + ا د \times ب ج$
 $> ج ا د$ کے مساوی $> ب ا ع$ بناؤ۔

فرض کرو کہ 'ا' ع' ب' د سے ع پر ملتا ہے
 مثلثات ب' ا' ع اور ج' ا' د میں
 $\angle \text{ب' ا' ع} = \angle \text{ج' ا' د}$
 اور $\angle \text{ا' ب' ع} = \angle \text{ا' ج' د}$
 اس لیے مثلثات ب' ا' ع اور ج' ا' د متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا' ب}}{\text{ا' ج}} = \frac{\text{ب' ع}}{\text{ج' د}}$$

یعنی $\text{ا' ب} \times \text{ج' د} = \text{ا' ج} \times \text{ب' ع}$ (۱)
 نیز مثلثات ب' ا' ج اور ع' ا' د میں
 $\angle \text{ب' ا' ج} = \angle \text{ع' ا' د}$
 اور $\angle \text{ا' ب' ج} = \angle \text{ا' ع' د}$
 اس لیے مثلثات ب' ا' ج اور ع' ا' د متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب' ج}}{\text{ع' د}} = \frac{\text{ا' ج}}{\text{ا' د}}$$

یعنی $\text{ا' د} \times \text{ب' ج} = \text{ا' ج} \times \text{ع' د}$ (۲)
 (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \text{ا' ب} \times \text{ج' د} + \text{ا' د} \times \text{ب' ج} &= \text{ا' ج} \times \text{ب' ع} + \text{ا' ج} \times \text{ع' د} \\ \text{ا' ج} (\text{ب' ع} + \text{ع' د}) &= \\ \text{ا' ج} \times \text{د' ب} &= \end{aligned}$$

نوٹ۔ اس مسئلہ کو بطلمیوس (Ptolemy) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

امثلہ ۱۳

(۱) مثلث ا' ب' ج میں ا' ب = ا' ج، قاعدہ ب' ج کے سروں
 ب' ا' اور ج' سے خطوط ب' ا' د اور ج' د کھینچے گئے ہیں جو بالترتیب ب' ا' اور ج' ا'

پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ب ج \times ا د = ا ب \times ب د$$

(۲) مثلث مساوی الاضلاع ا ب ج کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ب ج پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن ب + ن ج = ا$$

(۳) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج، اس مثلث کے حائل دائرہ کی قوس ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ن ب + ن ج) : ن ا ایک مستقل مقدار ہے۔ نیز بتاؤ کہ ن کے کس مقام کے جواب میں ن ب + ن ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہے۔

(۴) مربع ا ب ج د کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$(ن ا + ن ج) : (ن ب + ن د) = ن د : ن ج$$

(۵) منظم سدس ا ب ج د ع ف کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن ا + ن ب + ن ج + ن د = ن ف$$

(۶) بطلمیوس کے مسئلہ کی مدد سے زاویوں ع اور ہ کی حادہ قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$ج ب (ع + ہ) = ج ب ع جم ہ + جم ع جب ہ$$

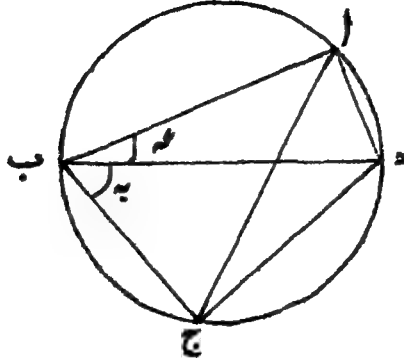
اکائی طول کے خط ا ب د کے قطر پر ایک دائرہ بناؤ۔ ب د کی مختلف سمتوں میں زاویے د ب ا اور د ب ج بالترتیب ع اور ہ کے مساوی بناؤ (دیکھو شکل صفحہ ۷۹)۔ ا ج کو ملاؤ۔

$$بطلمیوس کے مسئلہ کی مدد سے ا ب \times ج د + ا د + ب ج = ا ج \times ب د$$

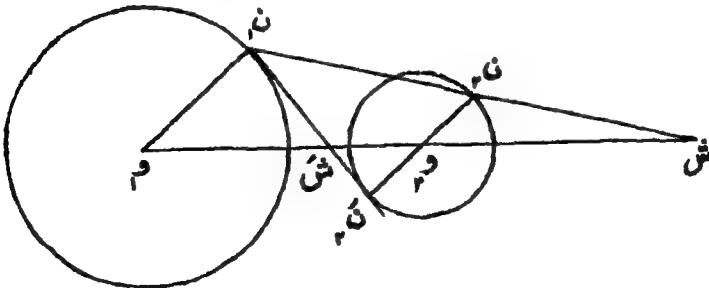
$$\text{یعنی جم ع جب ہ + جب ع جم ہ = ا ج (کیونکہ ب د = ا)}$$

لیکن مثلث ا ب ج میں $\frac{ا ج}{ج ب (ع + ہ)} =$ مثلث کے حائل دائرہ کا قطرب د = ا

∴ ا ج = جب (ع + ب)



پس ثابت ہوا کہ جب ع جم ب + جم ع جب ب = جب (ع + ب)
 (۷) مندرجہ بالا سوال کے طریقہ سے مناسب فطیلین کھینچ کر ثابت کرو کہ
 (۱) جب (ع - ب) = جب ع جم ب - جم ع جب ب
 (۲) جم (ع + ب) = جم ع جم ب - جب ع جب ب
 (۳) جم (ع - ب) = جم ع جم ب + جب ع جب ب
 ۴۸۔ اگر دو دائروں میں کوئی دو متوازی نصف قطر (ہر دائرہ میں ایک) کھینچے جائیں تو ان کے سروں کو ملانے والا خط مستقیم مرکزوں کے خط کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک نہایت پر قطع کرتا ہے۔



رض کرو کہ (م) اور (ن) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔

جن کے نصف قطر بالترتیب r اور R ہیں۔ ان میں دو نصف قطر (۱) OP اور OQ ایک ہی سمت میں متوازی اور (۲) OP اور OQ مخالف سمتوں میں متوازی کیئے گئے ہیں۔
 خطوط PN اور QN مرکزوں کے خط OP کو بالترتیب نقاط N اور N' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ PN اور QN' دو ثابت نقطے ہیں۔

حصہ اول۔ چونکہ $OP \parallel OQ$ اس لیے مثلثات PNQ اور QNP' متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{PN}{OQ} = \frac{QN}{OP} = \frac{PN'}{OQ}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 یعنی مرکزوں کے خط OP کی خارجی تقسیم P کی نسبت میں نقطہ N پر ہوتی ہے اس لیے N ایک ثابت نقطہ ہے۔

حصہ دوم۔ چونکہ $OP \parallel OQ$ اس لیے مثلثات PNQ اور QNP' متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{PN}{OQ} = \frac{QN}{OP} = \frac{PN'}{OQ}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 یعنی مرکزوں کے خط OP کی داخلی تقسیم P کی نسبت میں نقطہ N پر ہوتی ہے۔ اس لیے N ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

تعریف۔ نقاط N اور N' جن پر مرکزوں کے خط OP کی داخلی اور خارجی تقسیم نصف قطروں r اور R کی نسبت میں ہوتی ہے، ویسے ہونے دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔
 مشابہت کا مرکز ہے اور N آڑی مشابہت کا مرکز۔

امثلہ ۱۲

(۱) دائروں (۱) اور (۲) کے نصف قطر r اور R ہیں اور

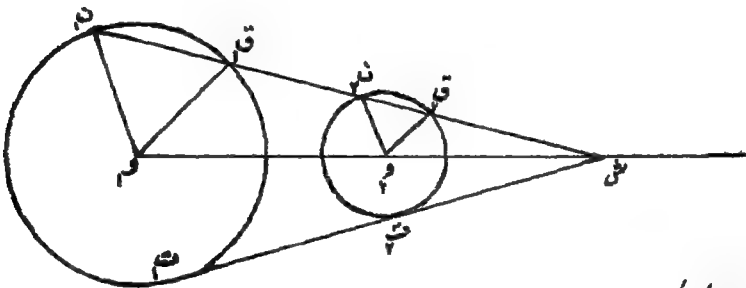
۱۲ = ۱۳ ان دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ محسوب کرو۔

[جواب - ۲۰]

(۲) ثابت کرو کہ دائروں (۱) اور (۲) کے راست مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع سیدھی مشابہت کے مرکزوں پر اور متقاطع مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع آڑی مشابہت کے مرکزوں پر ہے۔

(۳) ایک متغیر دائرہ (ج) دو دیے ہوئے دائروں (۱) اور (۲) کو نقاط اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم فن ق دیے ہوئے دائروں کے ایک نہ ایک مشابہت کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۴) دو دیے ہوئے دائروں (۱) اور (۲) کی سیدھی مشابہت کے مرکزوں میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائرہ (۱) کو نقاط ن اور ق پر اور دائرہ (۲) کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے (دیکھو شکل)



ثابت کرو کہ P, N, Q متوازی ہے P, N', Q' متوازی ہے P, Q, Q' کے۔

(۵) شکل بالا میں ثابت کرو کہ

$PN \times PQ = PN' \times PQ' = PQ \times PQ'$ اور $PN \times PQ = PN' \times PQ'$ جہاں P, N, Q اور P, N', Q' دیے ہوئے دائروں کے ایک راست مشترک مماس کے نقاط تماس ہیں۔

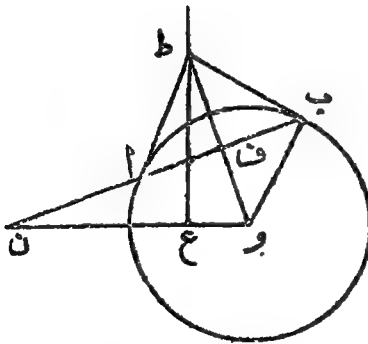
(۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حلقہ اور نقطہ دائروں کے مشابہت کے

مرکز مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز ہیں۔
(۷) ثابت کرو کہ دو مساوی دائروں کی سیدھی مشابہت کا مرکز لاتنا ہی
پڑھے۔

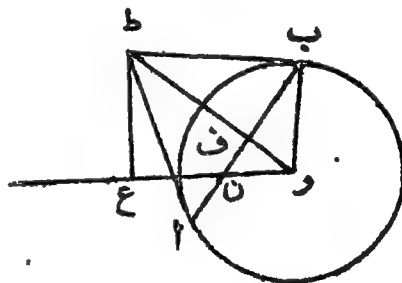
(۸) (۱) (۲) (۳) اور (۴) تین دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے مرکز
ہم خط نہیں ہیں۔ دائروں (۱) اور (۲) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز
بالترتیب $ش$ اور $مش$ ہیں۔ اور دائروں (۲) اور (۳) کی سیدھی اور آڑی
مشابہت کے مرکز بالترتیب $ش$ اور $مش$ ہیں اور دائروں (۳) اور (۴) کی سیدھی
اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب $ش$ اور $مش$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(۱) $دش$ ، $دش$ اور $دش$ متراکز ہیں
(۲) چھ نقطوں $ش$ ، $مش$ ، $ش$ ، $مش$ ، $ش$ ، $مش$ میں سے ایسے
تین تین نقطوں کے چار جٹ ہیں جو ہم خط ہیں۔

۴۹۔ ایک دائرے کے اُن وتروں کے بیروں پر کے پاسوں کے
نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں ایک خط مستقیم ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کرو کہ دائرہ (د) کی سطح میں ایک ثابت نقطہ $ن$ ہے۔ $ن$ سے
گزرنے والا کوئی خط دائرہ (د) سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملتا ہے اور ۱ اور ۲ پر

ماسات کا نقطہ تقاطع ط ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
 ون کو لاؤ اور ط سے ون پر عمود ط ع نکالو
 فرض کرو کہ و ط اور اب کا نقطہ تقاطع ف ہے
 و ب کو لاؤ۔

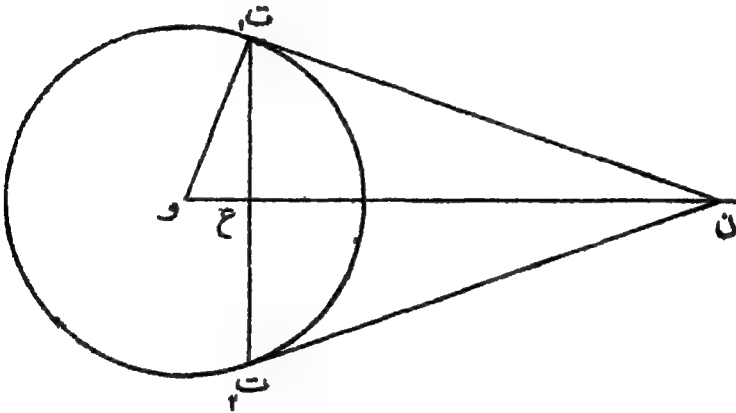
چونکہ ف اور ع پر کے زاویے قائم ہیں
 اس لیے نقاط ف، ع، ن، ط مشترک محیط ہیں۔
 اس لیے ون \times و ع = و ط \times و ف = و ب جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 اب چونکہ و اور ن ثابت نقطے ہیں اس لیے ع بھی ایک ثابت نقطہ ہے
 اور نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی وتر اب کے سروں پر کے ماسوں کا
 نقطہ تقاطع ط ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جو ثابت نقطہ ع میں سے گزرتا
 ہے اور ون پر عمود وار ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔
 نوٹ :- یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ع ط پر کے کسی نقطہ سے دائرہ (و)
 تک کھینچے ہوئے ماسوں کا وتر تاس نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ پس خط ع ط
 طریق کے دونوں شرائط کو پورا کرتا ہے۔

۵۔ تعریفیات۔ دفعہ گذشتہ کی ترقیم کے مطابق نقطہ ط
 کا طریق دیے ہوئے دائرہ (و) کے لمحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہلاتا ہے اور
 نقطہ ن دیے ہوئے دائرہ (د) کے لمحاظ سے خط ع ط کا قطب کہلاتا ہے۔
 اگر دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر مرکز کی ایک ہی جانب
 نقاط ن اور ن اس طرح لیے جائیں کہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ
 (و) کا نصف قطر ہے تو نقاط ن، ن میں سے ہر ایک بلحاظ دائرہ (و) کے
 دوسرے نقطہ کا مقلوب کہلاتا ہے۔ مثلاً دفعہ گزشتہ کی شکل میں نقاط ن اور
 ع بلحاظ دائرہ (و) کے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں پس حاصل ہوا کہ
 بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی ایک خط مستقیم ہے جو ن کے مقلوب
 میں سے گزرتا ہے اور ون پر عمود وار ہے۔
 ۵ ا۔ چونکہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر

اس لیے $و$ $ح$ بڑا ہے، مساوی ہے، چھوٹا ہے $و$ سے بموجب
اس کے کہ

$و$ $ن$ چھوٹا ہے یا مساوی ہے یا بڑا ہے نصف قطر $ر$ سے
پس حاصل ہوا کہ لمبا $و$ دائرہ $(و)$ کے نقطہ $ن$ کا قطبی دائرہ $(و)$ کو قطع نہیں کرتا ہے
یا $س$ کرتا ہے یا قطع کرتا ہے بموجب اس کے کہ نقطہ $ن$ دائرہ کے اندر ہے، دائرہ
پر ہے یا دائرہ کے باہر ہے۔

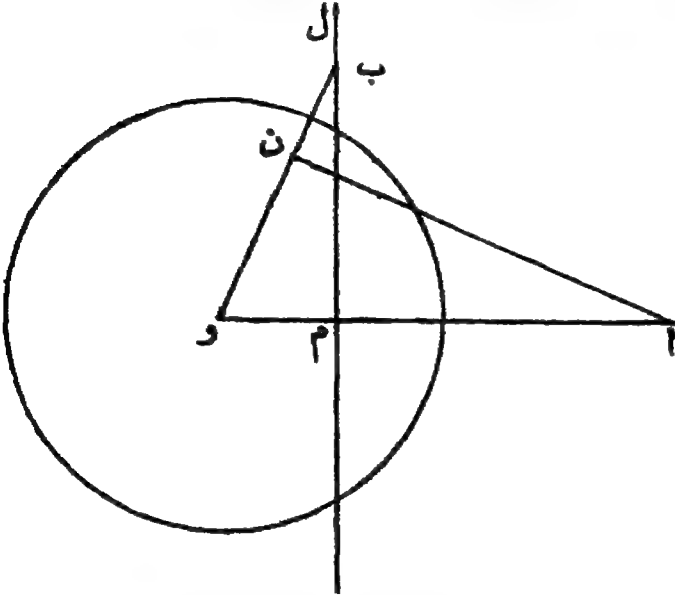
۵۲۔ مسئلہ۔ اگر نقطہ $ن$ دائرہ $(و)$ کے باہر ہو تو $ن$ کا قطبی
ان مماسات کا وتر تماس ہے جو $ن$ سے دائرہ $(و)$ تک کھینچے جائیں۔
نقطہ $ن$ سے دائرہ $(و)$ کے مماسات $ن$ $ت$ ، $ن$ $ت$ کھینچو۔



فرض کرو کہ وتر تماس $ن$ $ت$ خط $و$ $ن$ سے $ح$ پر ملتا ہے۔
چونکہ مثلث $و$ $ن$ $ت$ قائم الزاویہ ہے اور $ت$ $ح$ عمود ہے وتر $و$ $ن$ پر
اس لیے $و$ $ن$ $ح$ = $و$ $ت$
اس لیے لمبا $و$ دائرہ $(و)$ کے نقاط $ن$ اور $ح$ ایک دوسرے کے
مقلوب ہیں۔

نیز وتر تماس $ن$ $ت$ نقطہ $ن$ کے مقلوب $ح$ میں سے گزرتا ہے

اور ON پر عمود وار ہے۔
 اس لیے لمحاظ دائرہ (O) کے نقطہ N کا قطبی وتر تاس T ہے۔
 ۵۳۔ مسئلہ۔ اگر لمحاظ دائرہ (O) کے نقطہ A کا قطبی نقطہ B میں سے گزرے تو B کا قطبی A میں سے گزرے گا۔



فرض کرو کہ دائرہ (O) کے لمحاظ سے A کا قطبی خط l M ہے
 حسب مفروض خط l M نقطہ B میں سے گزرتا ہے
 فرض کرو کہ A اور l M کا نقطہ تقاطع M ہے
 OB کو طو W اور A سے OB پر عمود AN نکالو۔
 چونکہ M اور N پر کے OA و OB قاسمے ہیں
 اس لیے $ON \times OB = OM \times OA = OA^2$ جہاں R دائرہ (O) کا
 نصف قطر ہے۔

اس لیے لمحاظ دائرہ (O) کے B کا قطبی N ہے
 نیز A عمود ہے DB پر

اس لیے ب کا قطبی ن ا ہے اور یہ خط نقطہ ۲ میں سے گزرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی متکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔
مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے دو خطوط میں سے
ایک کا قطب دوسرے پر ہو تو دوسرے کا قطب پہلے پر ہوگا۔

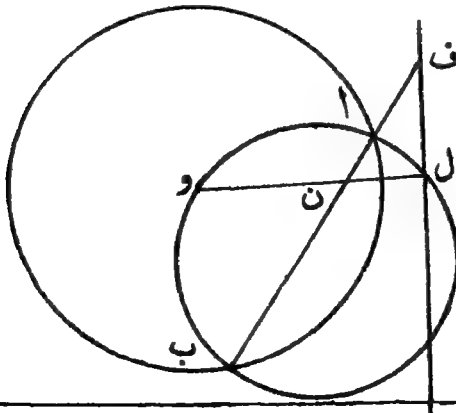
۵۴۔ تعریفات۔

(۱) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے نقطہ
مزدوج نقطہ کہلاتے ہیں۔ اگر ان نقطوں میں سے کسی کا ایک قطبی دوسرے نقطہ
میں سے گزرے۔

(۲) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے خطوط
مزدوج خطوط کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک خط کا قطب دوسرے خط پر
واقع ہو۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک مثلث کے ہر اُس کا
قطبی مقابل کا ضلع ہو تو مثلث مذکور دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے مثلث
مزدوج بالذات کہلاتا ہے۔

۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جا
جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر اور نقطہ ن کے قطبی
سے ف پر ملے تو ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔



صورت اولیٰ - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے۔

فرض کرو کہ ون، ن کے قطبی سے ل پر ملتا ہے۔

تب ون \times ن ل = ون (ول - ون) = ون \times ول - ون^۲

= ول^۲ - ون^۲ (کیونکہ ون \times ول = ول^۲)

نیز ب ن \times ن ا = ول^۲ - ون^۲

اس لیے ون \times ن ل = ب ن \times ن ا

یعنی نقاط و، ب، ل، ا مشترک محیط ہیں

نقاط و، ب، ل، ا میں سے گزرنے والا دائرہ کہیں جو۔

اس دائرہ کا وتر وب = وتر و ا کیونکہ ہر ایک وتر دائرہ (و)

کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے و ا اور وب کے محاذی ل پر

مساوی زاویے بنتے ہیں۔

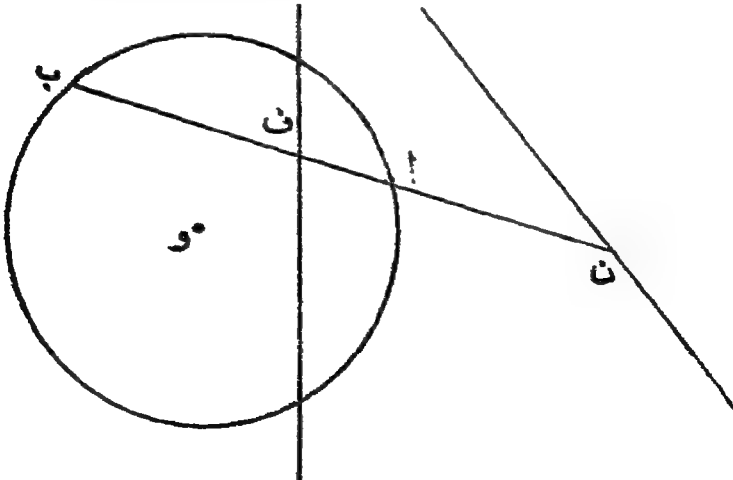
یعنی ل ن اندرونی منصف ہے > ب ل ا کا

نیز چونکہ > ن ن ف قائمہ ہے

اس لیے ل ف خارجی ناصف ہے > ب ل ا کا

اس لیے ا ب ل سویشی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے باہر ہے۔



چونکہ ن کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے اس لیے ف کا قطبی ن میں سے گزرے گا۔ اس لیے صورت اول کی رُو سے اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو ”قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت“ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ کا عکس سبب ذیل ہے :

اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ۱ اور ب پر لے اور اب پر ایک نقطہ ف ایسا لیا جائے کہ اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہو تو ف کا طریق ن کا قطبی ہوگا۔ اس کا ثبوت اطالب علم منطق کے طور پر خود ہم پہنچائے۔

امثلہ ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ دو نقطوں کو ملانے والا خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبیوں کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ایک دائرہ کے لحاظ سے ان خطوط کے قطبوں کو ملانے والے خط کا قطب ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے متراکز خطوط کے قطب ہم خط ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہیں۔

(۵) بجائے دائرہ (و) کے نقاط ۱ اور ب کے قطبی یہ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

۱ اور ب مساوی ہے اس زاویہ کے جو ۱ اور ب کے قطبیوں سے بنتا ہے۔

(۶) دو ہم مرکز دائروں میں سے کسی ایک کے مماسوں کے قطبوں کا طریق

بجائے دوسرے دائرہ کے معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مساوی وتروں کے قطبوں کا طریق دائرہ مذکور کے

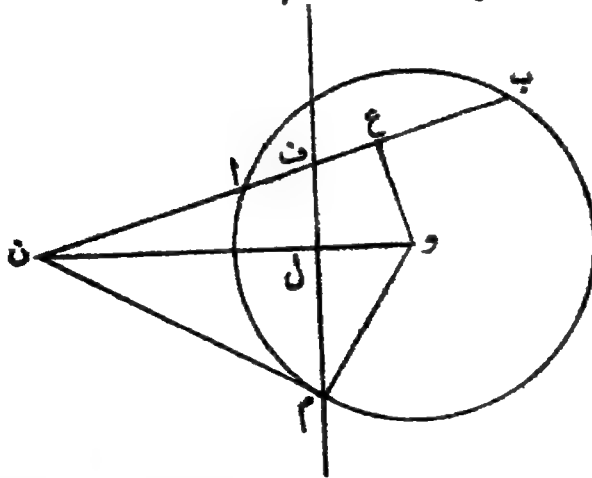
لحاظ سے ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

(۸) دائرہ (و) کے لحاظ سے ۱ اور ۲ مزدوج نقطے ہیں اور خط ۱ ب کا قطب ج ہے ثابت کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے مثلث ۱ ب ج مزدوج بالذات ہے۔
(۹) اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز دائرہ کے مرکز پر ہوگا۔

(۱۰) اگر دائرہ (و) کے لحاظ سے نقاط ۱ اور ۲ کے قطبی لیے جائیں اور ۱ ب کے قطبی پر عمود ۱ ل اور ۲ ب کے قطبی پر عمود ۲ م نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ۱ : ۲ = ۱ ل : ۲ م

[اسے سامن (Salmon) کا مسئلہ کہتے ہیں]
(۱۱) اگر ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے

جو دائرہ (و) سے ۱ اور ۲ پر اور ن کے قطبی سے ف پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ۱ اور ن ۲ کا موسیقی اوسط ن ف ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ن کا قطبی خط ون سے ۱ پر اور دائرہ (و) سے م پر ملتا ہے۔

ن م اور و م کو ملاؤ اور و سے ۱ ب پر عمود و ع نکالو۔
چونکہ ن م دائرہ (و) کا مماس ہے

اس لیے $ن \times ۱ \times ب = ن^۲$ (کیونکہ $ن \times ل = ن \times م$)
 $ن \times ف \times ع = ن^۲$ (کیونکہ $ن \times ا \times ع = ن^۲$)
 مشترک المحیط ہیں)

اس لیے $ن^۲ \times ۱ \times ب = ن^۲ \times ف \times ع$
 $ن \times ف \times (ن + ۱ \times ب) =$ (کیونکہ $ا \times ب$ کا
 وسطی نقطہ $ع$ ہے)

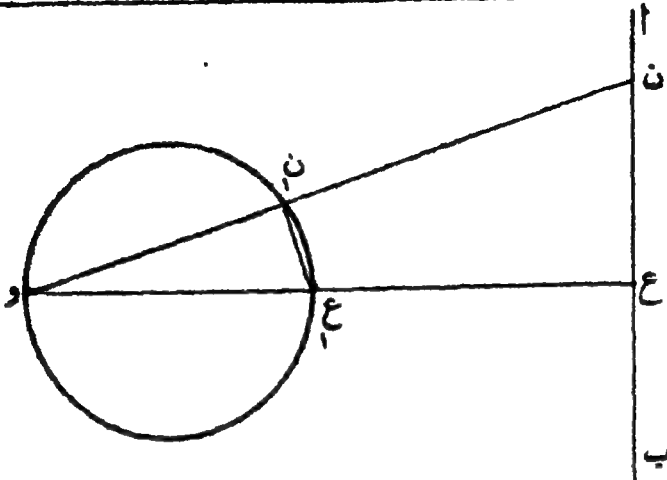
$$\frac{ن^۲ \times ۱ \times ب}{ن + ۱ \times ب} = ن \times ف$$

یعنی $ن$ فی موسیقی اوسط ہے $ن$ اور $ن + ۱$ کا۔
 ۵۶۔ * - تقلیب - دفعہ ۵۰ کی تعریف کی مدد سے ہم ایک
 دیے ہوئے دائرہ کے نماذ سے جس کا نصف قطر $ب$ ہو ایک دیے ہوئے
 نقطہ $ن$ کا مقلوب نقطہ $ن$ معلوم کر سکتے ہیں۔ دائرہ کے مرکز $و$ کو تقلیب کا
 مرکز اور نصف قطر $ر$ کو تقلیب کا نصف قطر کہتے ہیں۔
 نیز بعض اوقات $ر$ کو تقلیب کا مسدقل کہتے ہیں۔ اور دائرہ کو
 تقلیب کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر $ن$ کوئی طریق مشتمل کرے تو $ن$ کے مقلوب $ن$ کے طریق کو
 $ن$ کے طریق کا مقلوب کہتے ہیں۔
 مندرجہ بالا تعریفات سے ظاہر ہے کہ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا
 ہر خط اپنا آپ مقلوب ہے۔

۵۷۔ * - مرکز - ایک ایسے خط مستقیم کا مقلوب جو تقلیب کے
 مرکز میں سے نہ گزرے تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہوگا
 فرض کرو کہ $و$ یا $ا$ یا $ب$ ہے اور تقلیب کا مرکز $و$ اور
 تقلیب کا نصف قطر $ر$ ہے۔

$و$ سے $ا$ پر عمود $و$ ع نکالو اور $ع$ کا مقلوب $ع$ معلوم کرو۔
 نیز $ا$ پر کسی نقطہ $ن$ کا مقلوب $ن$ معلوم کرو۔



بموجب تعریف $و ع \times و ع = و ن$

اور $و ن \times و ن = و ن$

$\therefore و ع \times و ع = و ن \times و ن$

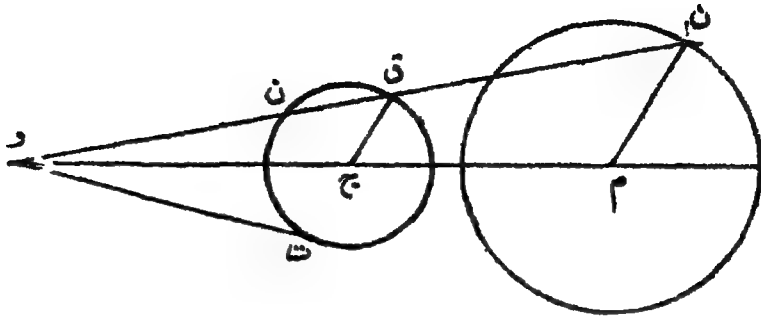
\therefore نقاط 'ع'، 'ع'، 'ن' مشترک محیط ہیں۔

$\therefore و ن > و ع = و ن$ قائمہ

اس لیے $و ع$ کے محاذی $ن$ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے

اس لیے $ن$ کا طریق یعنی خط مستقیم اب کا مقلوب $و ع$ قطر پر کا دائرہ ہے۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا کی شکل میں نقاط $ن$ اور $ن$ ایک دوسرے کے مقلوب ہیں اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایک خط مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائرہ کے اس قطر پر جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے عمود وار ہے اور تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔
 ۵۸۰۔ ایک ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔
 فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز $و$ اور تقلیب کا مستقل $ر$ ہے۔ نیسنر فرض کرو کہ دیے ہوئے دائرہ (ج) پر کے کسی نقطہ کا مقلوب $ن$ ہے۔



تغلیب کے مرکز د سے دائرہ (ج) کا ایک ماس وت کھینچو فرض کرو کہ
 طول وت = م
 نیز فرض کرو کہ خط ون دائرہ (ج) سے کرر نقطہ ق پر ملتا ہے۔
 ق ج کو ملاؤ اور ن م متوازی ق ج کے کھینچو جو د ج سے م پر ملے۔
 چونکہ ون × ون = دق = ر_۱
 اور ون × وق = دق = م

اس لیے $\frac{ون}{وق} = \frac{ر_۱}{م}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

نیز متشابہ مثلثات دم ن اور د ج ق سے

$\frac{دم}{وج} = \frac{م}{ج ق} = \frac{ن}{وق}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

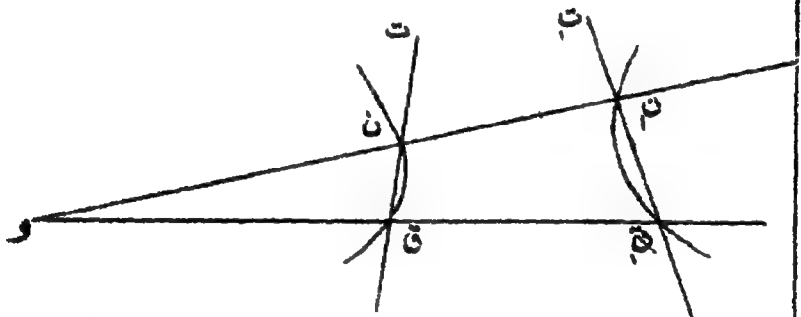
اس لیے م ایک ثابت نقطہ ہے اور م ن کا طول مستقل ہے۔
 پس ثابت ہوا کہ ن کا طریق یعنی دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مقلوب
 لمحاظ مرکز د کے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے۔

۵۹*۔ تعریفات۔

(۱) اگر ایک منحنی پر دو نقطے ن اور ق ہوں تو وتر ن ق کا

انتہائی مقام جب کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے انتہا قریب آجاتا ہے منحنی کے نقطہ ن پر کا ماس کہلاتا ہے۔
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا ماس خود وہی خط مستقیم ہے۔

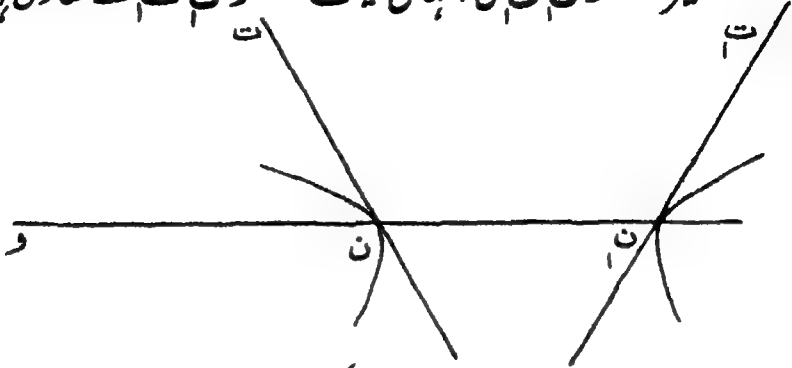
(۲) دو تقاطع منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ منحنیوں کا زاویہ تقاطع کہلاتا ہے۔
مثلاً ۶۰° - تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا کوئی خط مستقیم ایک منحنی اور اس کے مقلوب کو مکمل زاویوں پر قطع کرتا ہے۔



فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے۔
منحنی پر دو نقطہ ن اور ق ایک دوسرے کے قریب ہیں اور ان مقلوب ن اور ق میں جو لازماً ایک دوسرے کے قریب واقع ہوں گے۔
ق ن کو ت تک اور ق ن کو ت تک خارج کرو۔
 $ون \times ون = وق \times وق$ کیونکہ ہر ایک مقدار تقلیب کے مستقل ر کے مساوی ہے۔

اس لیے ن، ن، ق، ق مشترک محیط میں۔
اس لیے زاویے ون ت اور وق ن مکمل زاویے ہیں۔
اب جوں جوں نقطہ ق نقطہ ن کے قریب آتا ہے دیے ہی نقطہ ق بھی ن کے قریب آئیگا اور انتہا میں خطوط ق ن ت اور ق ن ت بالترتیب

نقاط ن اور ن پر مخنیوں کے مساوات ن ت اور ن ت بن جائینگے۔
نیز > و ق ن کی انتہائی قیمت > و ن ت کے مساوی ہوگی۔



اس لیے و ن ت اور و ن ت مکمل زاویے ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ :- مندرجہ بالا نتیجہ کی مدد سے یہ سانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دو متقاطع
مخنیوں کا زاویہ تقاطع ان کے متقاربوں کے زاویہ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز اگر
دو مخنی ایک دوسرے کو کسی نقطہ ق پر مس کریں تو ان کے متقارب بھی ایک دوسرے
کو ق کے متقارب نقطہ ق پر مس کریں گے۔

۶۱۔ تعریف۔ اگر دو دائروں کا زاویہ تقاطع زاویہ قائمہ ہو تو
یہ دائرے علی القوائم دائرے کہلاتے ہیں۔ یا یوں کہا جاتا ہے کہ یہ
دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو
علی القوائم قطع کریں تو کسی ایک نقطہ تقاطع پر ہر دائرہ کا ماس دوسرے
دائرہ کے مرکز میں سے گزرے گا۔

مندرجہ بالا نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے ”دو علی القوائم دائروں
کے کسی ایک نقطہ تقاطع تک کھینچے ہوئے نصف قطر ایک دوسرے پر
علی القوائم ہوتے ہیں۔ اور دائروں کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا
مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا
ہے۔“

امثلہ ۱۶

(۱) اگر تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم پر کے تین نقطوں 'ن' 'ق' 'ط' کے مقلوب 'ن' 'ق' 'ط' ہوں تو ثابت کرو کہ (ا) 'اُردن' 'وق' 'وط' سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو 'دن' 'وق' 'وط' سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے۔ (ب) 'دن' 'وق' 'وط' سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو 'دن' 'وق' 'وط' سلسلہ ہندسیہ میں ہونگے۔

(۲) ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تقلیب کے مرکز اور نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ میں منقلب کیا جا سکتا ہے۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے باہر کے کسی نقطہ پر تقلیب کا مرکز لیا جائے تو ثابت کرو کہ تقلیب کے نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا دائرہ اپنے آپ میں منتقل ہو سکتا ہے۔

(۴) اگر تقلیب کے مرکز و اور نصف قطر کے لحاظ سے نقاط 'ا' و 'ب' کے مقلوب 'ن' اور 'ق' ہوں تو ثابت کرو کہ $ن ق = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ا} \times ن ق$ ۔

(۵) اگر تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر کے دو نقطوں 'ن' اور 'ق' کے مقلوب 'ن' اور 'ق' ہوں اور تقلیب کے دائرہ پر کوئی نقطہ لا ہو تو ثابت کرو کہ $ن ق = ا ب$ ۔

(۶) (ا) دائرہوں کے مرکزوں کا باقی معلوم ہو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر ملے، التوائے قطع کریں۔

(۷) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر ملے، التوائے قطع کرے۔

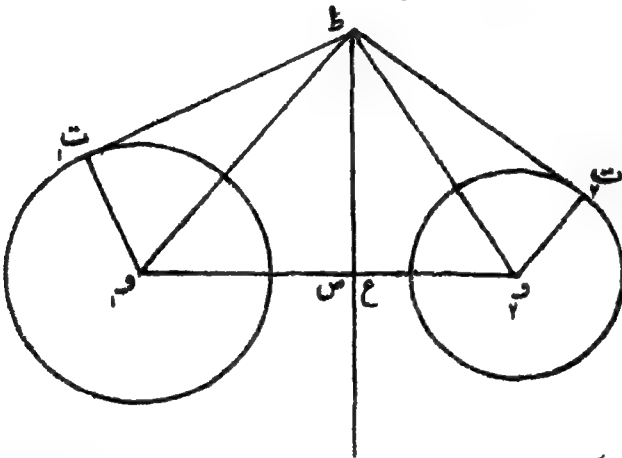
(۸) ایک دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر ملے، التوائے قطع کرے۔

(۹) ثابت کرو کہ دو علی التوائے دائرہوں میں سے ایک کے کسی قطری موسیقی تقسیم

دوسرے کے محیط پر ہوتی ہے - (دیکھو دفعہ ۹۲) -

(۱۰) بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا مقلوب ن بے ثابت کردہ نقطان اور ن میں سے گزرنے والا ہر دائرہ 'دائرہ (و) کو علی التوائم قطع کرتا ہے -
(۱۱) بلحاظ دائرہ (و) کے نقطان اور ق مزدوج نقطے ہیں - ثابت کردہ وہ دائرہ جس کا قطر ن ق ہے، دائرہ (و) کو علی التوائم قطع کرتا ہے -

۶۲ - مسئلہ - اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائرہ تک کھینچے ہوئے حاس مساوی ہوں ایک خط مستقیم ہے جو دائروں کے مرکروں کو ملانے والے خط پر عمود وار ہوتا ہے -



فرض کرو کہ (و) اور (د) دو دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب ل اور ل ہیں - نیز فرض کرو کہ نقطہ ط سے ان دائروں تک کھینچے ہوئے حاسات ط ت اور ط ت مساوی ہیں -
ط ت، ط ت، ط ت اور ط ت کو ملاؤ اور ط سے د پر عمود ط ع نکالو -

چونکہ حسب مفروض ط ت = ط ت

∴ ط ت = ط ت

∴ ط د - و ت = ط د - و ت

$$\therefore \text{ع ط}^1 + \text{دع}^1 - \text{د ت}^1 = \text{ع ط}^2 + \text{دع}^2 - \text{د ت}^2$$

$$\therefore \text{دع}^2 - \text{دع}^1 = \text{د ت}^2 - \text{د ت}^1$$

$$= \text{ر}^2 - \text{ر}^1 \text{ جو ایک مستقل مقدار ہے۔}$$

$$\text{لیکن } \text{دع}^2 - \text{دع}^1 = (\text{دع} + \text{دع}) - (\text{دع} - \text{دع})$$

$$= 2 \text{ د} \text{ (۲ ص ۲) یہاں د د کا وسطی نقطہ ص ہے۔}$$

$$\therefore 2 \text{ د} \text{ د} \times \text{ص ع} = \text{ر}^2 - \text{ر}^1 \text{ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکزوں}$$

کو لانے والے خط پر ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقطہ ط ۶ راقی ایک خط مستقیم ہے جو مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے۔

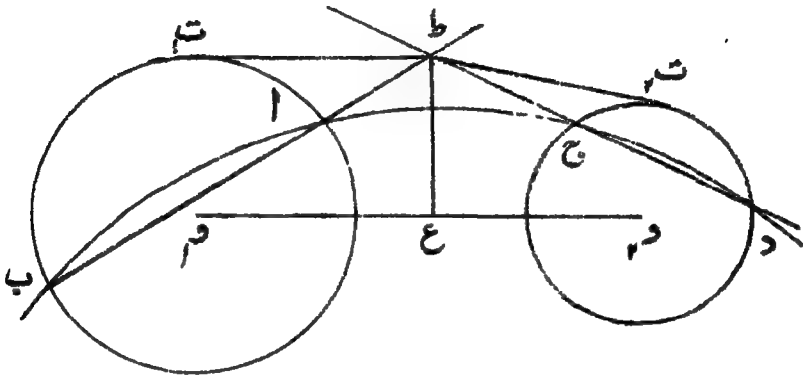
نوٹ - ثبوت بالا میں ثابت نہر ثابت ہوئی ہے کہ نقطہ ع مرکزوں کے خط کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مرکزوں کا راقی سب سے چوٹے دائروں کے شعاع قطرہوں کے مرکزوں کے فرق کے مساوی ہے۔

طالب علم بطور مشق کے یہ ثابت کرے کہ اس صورت میں (راقی کی دو مرکزی شعوط بھی پوری ہوتی ہے یعنی اس طریق پر کے کسی نقطہ سے دو دایوں تک پہنچے ہوئے ہوں گے) مساوی ہیں۔

۶۴ - تعریف - اس نقطہ کا طریقہ ہے کہ دو دایوں کے مرکزوں کے راقی کا وسطی نقطہ ہوئے ہوں گے اس مساوی ہوں گے ہوئے ہوں گے کا جیہ راقی محور کہلاتا ہے۔

نوٹ (۱) اگر دیے ہوئے دائرے متقاطع ہوں تو سرخیاؤں کے متساوی متقاطع مطلوب طریق پر واقع ہیں۔ اس سے مطلوب طریقہ ان متساوی متقاطع میں سے گزرنے والا خط مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کا وتر مشابہ ہے۔ اس سے اس حصہ پر کے کسی نقطہ سے جو دیے ہوئے دائروں کے مرکزوں کے راقی کے وسطی نقطہ سے گزرتا ہے وہی خط مستقیم ہوگا۔ لیکن یہ بات ہے کہ خیالی ہونے سے یہی اعلان کے ہوتی ط ۶ مساوی ہیں۔ اس نکتہ کی مزید تشریح مندرجہ تحلیل کی کسی باب میں پائی جا سکتی ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر دیے ہوئے دائرے غیر متقاطع ہوں تو نقطہ ع دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔ اس لیے مطلوب طریق کلیتہً دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔
۶۴۔ دو دیئے ہوئے دائروں (د) اور (د) کا بنیادی محور کھینچنا۔



کوئی دائرہ کھینچو جو دائرہ (د) کو ا اور ب پر اور دائرہ (د) کو ج اور د پر قطع کرے۔ اب اور ج د کے نقطہ تقاطع ط سے مرکزوں کے خط د د پر عمود ط ع نکالو۔

تب ط ع مطلوب بنیادی محور ہوگا۔
نقطہ ط سے دائروں (د) اور (د) کے ماس ط ت اور ط ت کھینچو۔

$$(۱) \quad \text{ط ت} = \text{ط ا} \times \text{ط ب}$$

$$(۲) \quad \text{ط ت} = \text{ط ج} \times \text{ط د}$$

چونکہ تقاطع ا ب ج د مشترک محیط ہیں۔

$$(۳) \quad \text{ط ا} \times \text{ط ب} = \text{ط ج} \times \text{ط د}$$

(۱) (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط ت} = \text{ط ت}$$

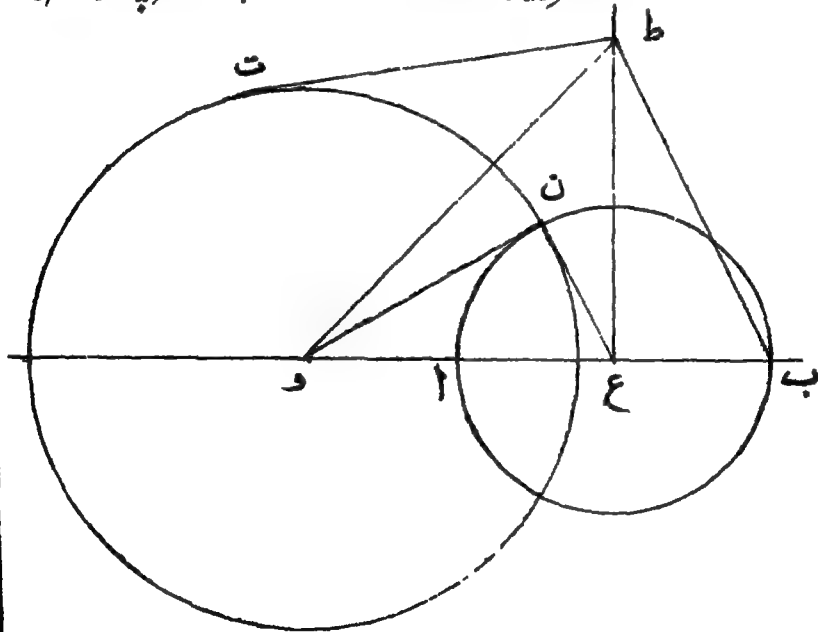
$$\text{ط ت} = \text{ط ت} \quad \text{یعنی}$$

یعنی نقطہ ط دیے ہوئے دائرؤں (د) اور (قہ) کے بنیادی محور پر کا ایک نقطہ ہے۔ اور چونکہ ط ع مرکزوں کے خط د قہ پر عمود ہے، اس لیے ط ع دیے ہوئے دائرؤں کا بنیادی محور ہے۔

نوٹ۔ متقاطع دائرؤں کا بنیادی محور کیسے بنانے کے لیے اس طوائفی عمل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ ان کے تقاطع میں سے گزرنے والا خط مستقیم ہی بنیادی محور ہوتا ہے۔

۶۵۔ مسئلہ۔ اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جن کے مرکز ایک

دیے ہوئے دائرہ کے ایک قطر محدودہ پر ہوں اور جو دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائرؤں میں سے کسی دو دائرؤں کا بنیادی محور وہ خط مستقیم ہوگا جو دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گزرے اور دیے ہوئے قطر پر عمود وار ہو۔



فرض کرو کہ دیا ہوا دائرہ (ع) ہے۔ اس کے ایک ثابت قطر اب محدودہ پر کوئی نقطہ و لو اور و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو دائرہ (ع) کو نقطہ ن پر

علی القوائم قطع کرے۔ دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ع میں سے ایک خط مستقیم کھینچو جو ثابت قطر اب پر عمود وار ہو اور اس قطر پر کوئی نقطہ ط و اور ط سے دائرہ (و) کا ٹاس ط ات کھینچو۔

وط، ون، ع ن اور ط ب کو ملاؤ۔

تب ط ب = ط و - ون

= ط ع + وع - (وع - ع ن)

= ط خ + ع ن

= ط ع + ع ب

= ط ب جو و کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اس لیے دائرہ (و) جیسے کسی دو دائروں کا بنیادی محور خط مستقیم ع ط ہے یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ چونکہ نقطہ ع دائرہ (و) کے باہر واقع ہے اس لیے بنیادی محور ع ط دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ (و) جیسے دائروں میں سے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

۶۶۔ تعریفات۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان میں سے کسی دو دائروں کا ایک ہی بنیادی محور ہو تو یہ دائرے ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔ دفعہ گذشتہ میں قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل کرنے کے طریقہ کی تشریح کی گئی ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرہ (و) کا مرکز دائرہ (ع) کے قطر اب کے اندر واقع نہیں ہو سکتا

یعنی ع و > ع ا۔

نیز ون = وع - ع ن

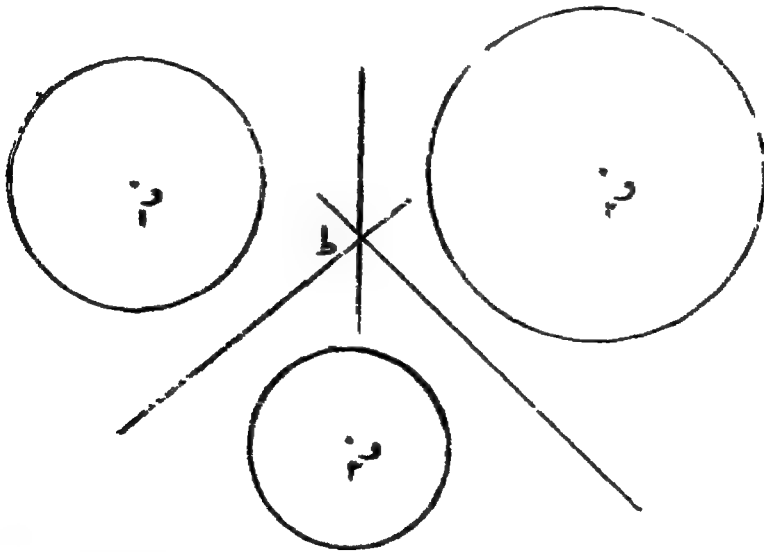
= وع - ع ا

اس لیے جو جو نقطہ و دائرہ (ع) کے قریب آتا ہے ویسے ہی دائرہ (و) کا نصف قطر بتدریج گھٹتا ہے اور جب نقطہ و نقاط ا اور ب میں سے کسی ایک پر منطبق ہوتا ہے تو دائرہ (و) کا نصف قطر صفر ہے۔ نقاط ا اور ب

بہر محور دائروں کے اس نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں جس کا مرکز دائرہ
 (ج) کو علی القوامہ قطع کرتا ہے۔ ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے نظام کے
 نقطہ دائرے بھی کہلاتے ہیں۔

اگر متہم دائرے ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو ثابت نقطوں
 میں سے گزرتا ہے تو ان دائروں سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام
 حاصل ہوتا ہے اور اس نظام سے چھوٹا دائرہ دو دائرہ ہے جو درجہ شکر
 کے قطر پر چھپی بیبا ہے۔ اس سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کے نظام کی صورت
 میں انتہائی نقطے یا نقطہ دائرے وجود نہیں رکھتے ہیں۔

۶۷۔ مسئلہ۔ تین دائروں میں سے دو دو دائروں کے
 تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔



ذہنی گرو کہ (د) (ج) اور (ب) تین دیے ہوئے دائرے ہیں۔
 نیز غرض یہ دائروں (د) اور (ج) کا بنیادی محور دائروں (ج) اور (ب) سے
 بنیادی محور نقطہ ط پر قطع کرتا ہے ثابت کرتا ہے کہ دائروں (ج) اور (ب)

بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے -
 چونکہ نقطہ ط دائرؤں (۱) اور (۲) کے بنیادی محور پر ہے، اس لیے
 ط سے دائرؤں (۱) اور (۲) تک کھینچے ہوئے ماسوں کے طول مساوی ہیں -
 اسی طرح ط سے دائرؤں (۳) اور (۴) تک کھینچے ہوئے ماسوں
 کے طول بھی مساوی ہیں -

اس لیے ط سے دائرؤں (۴) اور (۵) تک کھینچے ہوئے ماسوں کے
 طول مساوی ہیں -

اس لیے نقطہ ط دائرؤں (۴) اور (۵) کے بنیادی محور پر واقع ہے -
 یعنی دائرؤں (۴) اور (۵) کا بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے -
تعریف - تین دائرؤں میں سے دو کے تین بنیادی محوروں کے
 نقطہ تراز کو ان دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں -

نوٹ (۱) - اگر دیے ہوئے تینوں دائرؤں کے مرکز ہم خط ہوں تو ظاہر
 کہ تینوں بنیادی محور متوازی ہونگے اور اس صورت میں ان کا نقطہ تقاطع یعنی
 بنیادی مرکز لاتنا ہی پر ہوگا -

نوٹ (۲) - اگر بنیادی محوروں کا نقطہ تقاطع دیے ہوئے تین دائرؤں میں
 سے ایک کے اندر ہو (جس کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ وہ دوسرے دو دائرؤں کے بھی اندر
 ہوگا) تو نقطہ ط سے دیے ہوئے دائرؤں تک حقیقی ماس نہیں کھینچ سکتے - اس لیے
 مسئلہ بالا کے ثبوت میں مناسب تبدیلی کی ضرورت ہوگی - یہ ثبوت بطور مشق کے طالب علم
 خود بہم پہنچائے -

نوٹ (۳) - اگر بنیادی محوروں کا نقطہ تقاطع ط دائرؤں کے اندر ہو تو
 اس صورت میں بھی نقطہ ط کو دیے ہوئے تین دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں -
 ہندسہ تخلیلی میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اس صورت میں بنیادی مرکز سے دیے ہوئے
 تین دائرؤں تک کھینچے ہوئے خیالی ماسات کے خیالی طول مساوی ہیں -

امثلہ ۱

(۱) ثبوت کرو کہ دو دائرؤں کا بنیادی محور ان دائرؤں کے مشترک ماسوں

کی تصنیف کرتا ہے۔

(۲) اگر دو دائروں کے بنیادی محور بر کے کسی نقطہ سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز یہ نقطہ ہے اور نصف قطر مماس کا طول ہے دیئے ہوئے دونوں دائروں کو علی التوالم قطع کرتا ہے۔

(۳) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو ممس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور نقطہ مماس پر کا مشترک مماس ہے۔

(۴) اگر تین دائروں میں سے ہر دو ایک دوسرے کو ممس کریں تو ثابت کرو کہ نقاط مماس پر کے مماس متراکز ہوتے ہیں۔

(۵) اگر ایک مثلث کے ضلعوں پر نقطہ مان کر تین دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان دائروں کا بنیادی مرکز مثلث کا مرکز عری ہے۔

(۶) تین دیئے ہوئے دائروں کے بنیادی مرکز وہ ہیں جو کسی ایک کا مماس وت لھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز وہ اور نصف قطر وہ ہے دیئے ہوئے تینوں دائروں کو علی التوالم قطع کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو ایک دیئے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیئے ہوئے دائرہ کو علی التوالم قطع کریں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزریں گے۔

(۸) ان دائروں کے مرکزوں کا "نقہ معلوم" جو ایک دیئے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیئے ہوئے دائرہ کو علی التوالم قطع کریں۔

(۹) ایک "نقہ معلوم" جو دو دیئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں اور ایک دیئے ہوئے دائرہ کو علی التوالم قطع کرے۔

(۱۰) ایک "نقہ معلوم" جو دو دیئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں اور دو دیئے ہوئے دائروں کو علی التوالم قطع کرے۔

(۱۱) ایک "نقہ معلوم" جو دو دیئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں اور دو دیئے ہوئے دائروں کو علی التوالم قطع کرے۔

پانچواں باب

دائروں کا بنانا

۶۸۔ تین شرائط کے دیے جانے پر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔ مثلاً (۱) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے (۲) ایک دائرہ صیغ سکتا ہے جس کا نصف قطر دیا ہوا ہو اور جو ایک دیے ہوئے خط (یا دائرہ) کو ایک وسیع ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۶۹۔ دو شرائط کو پورا کرنے والے دائروں کے مرکوزوں کے طریق کے متعلق مندرجہ ذیل اہم نتائج سے طالب علم پہلے ہی سے واقف ہوگا۔ (۱) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دیے ہوئے نقطہ پر ہے۔

(۲) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کا عمودی منصف ہے۔ (۳) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط کو مس کرے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصف ہیں۔

(۴) اب دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط ہے جو نقطہ مذکور میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۵) ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک معلومہ نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق معلومہ نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والا خط ہے۔
(۶) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے دیے ہوئے خط کے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔

(۷) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرتا ہے دیے ہوئے دائرہ کے ساتھ ہم مرکز دائروں کا ایک جوڑا ہے۔

امثلہ ۱۸

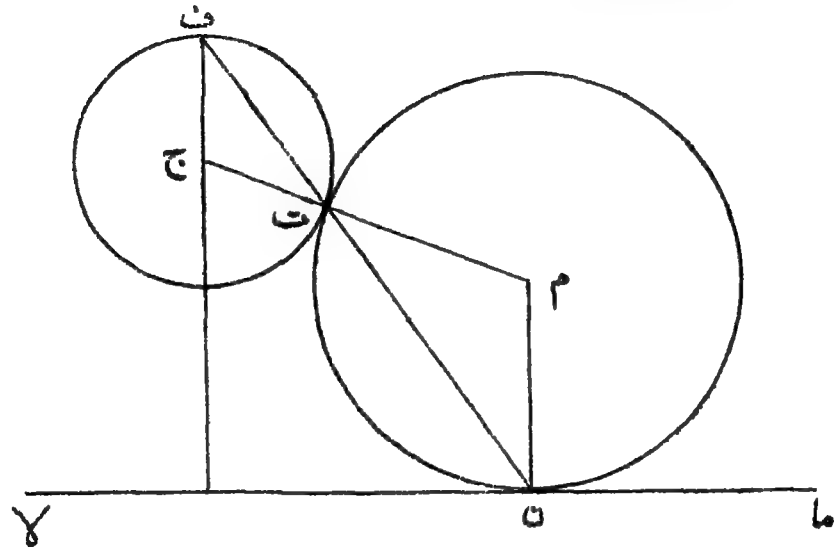
(۱) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
(۲) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو دو معلومہ نقطوں میں سے گزرے۔

(۳) دیے ہوئے نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں (یا دائروں) کو مس کرے۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟
(۴) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو یا ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔
(۵) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۷۰۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ

(ج) کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط مستقیم کا محور کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

تحلیل - فرض کرو کہ دائرہ (م) مطلوبہ دائرہ ہے اور یہ دیے ہوئے دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔



فرض کرو کہ ن ت دائرہ (ج) سے کر نقطہ ف پر ملتا ہے۔

ج ف، ج ت، م ت اور م ن کو ملاؤ۔

مثلث متساوی الساقین م ن ت میں

$$(۱) \quad \angle م ن ت = \angle م ت ن \dots\dots\dots$$

نیز مثلث متساوی الساقین ج ت ف میں

$$(۲) \quad \angle ج ف ت = \angle ج ت ف \dots\dots\dots$$

لیکن چونکہ دائرہ (م) دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے

اس لیے م ت ج خط مستقیم ہے

$$(۳) \quad \angle م ت ن = \angle ج ت ف \dots\dots\dots$$

نتیجہ (۱)، (۲)، (۳) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\angle م ن ت = \angle ج ف ت$$

اس لیے ج ف // م ن

اب چونکہ دائرہ (م) خط لا ما کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے

اس لیے م ن عمود ہے لا ما پر

اس لیے ج ف بھی عمود ہے لا ما پر

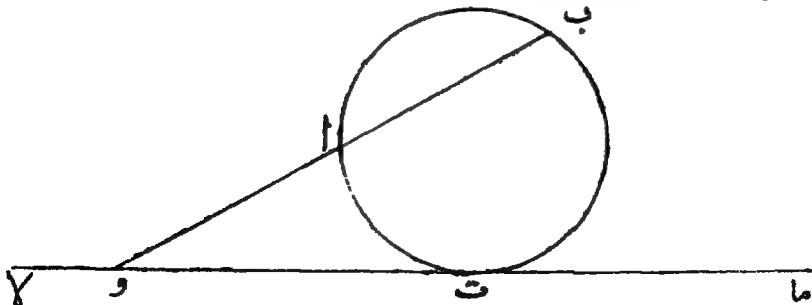
پس اگر دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج سے دیے ہوئے خط لا ما پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود اور دائرہ (ج) کے نقطہ تقاطع سے نقطہ ف حاصل ہوتا ہے اور ف ن اور دائرہ (ج) کا نقطہ تقاطع ت مطلوبہ نقطہ تماس ہے اور ج ت اور ن م کے تقاطع سے مطلوبہ دائرہ کا مرکز م حاصل ہوتا ہے۔

اس تحلیل کی بناء پر طالب علم اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت خود ہم پہنچائے۔
نوٹ۔ وہ خط جوج میں سے گزرتا ہے اور لا ما پر عمود ہے دائرہ (ج) کو ایک اور نقطہ ف پر بھی کاٹتا ہے جس کی مدد سے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا ایک اور دائرہ بھی کھینچ سکتا ہے۔

نوٹ۔ مندرجہ بالا طریقہ آسانی ذیل کے عملی مسئلہ کے حل کے طریقہ کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ایک دیے ہوئے نقطہ ت پر مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط لا ما کو بھی مس کرے۔

اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت طالب علم خود بطور مشق کے ہم پہنچائے۔
۱۔ **مسئلہ عملی۔** ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے خط لا ما کو مس کرے



اور دو دیے ہوئے نقطوں ۱ اور ۲ میں سے جو لا ما کی ایک ہی جانب واقع ہوں، گزرے۔

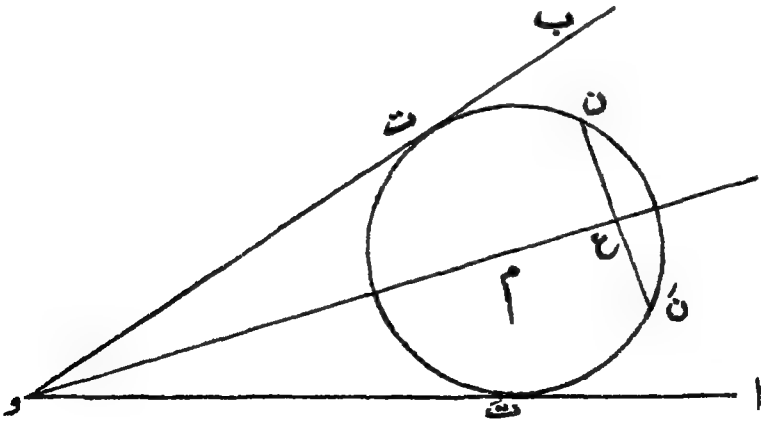
تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ دیے ہوئے خط لا ما کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ب ۱ دیے ہوئے خط لا ما کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے۔

تب $وت = ۱ \times وب$ جو معلوم ہے
اس لیے وت معلوم ہو سکتا ہے اور اس کی مدد سے دیے ہوئے خط لا ما اور مطلوبہ دائرہ کا نقطہ تماس حاصل ہوتا ہے۔ پس دائرہ ۱ ب ت مطلوبہ دائرہ ہے۔
نوٹ۔ چونکہ خط لا ما پر و کی دوسری جانب ایک اور نقطہ ت بھی ایسا لیا جاسکتا ہے کہ $وت = ۱ \times وب$ اس لیے ایک اور دائرہ ۱ ب ت کھینچ سکتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

طالب علم اس تحلیل کی بناء پر عمل حاصل کرے اور ثبوت ہم پہنچائے۔

۲۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط

۱ و ۲ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرے۔



تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے۔ چونکہ دائرہ (م) خطوط ۱ و ۲

اور وب کو مس کرتا ہے، اس لیے اس کا مرکز ان خطوط کے درمیانی زاویہ کے منصف پر ہے۔

ن سے دم پر عمود ن ع نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ (م) مکرر (ن) پر ملے۔

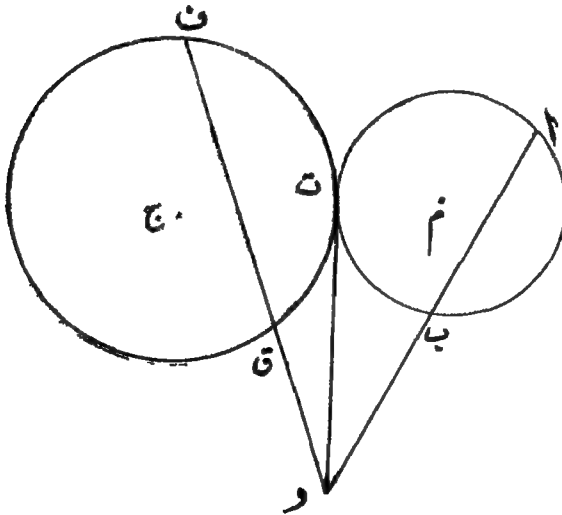
تب $ن ع = ع ن$ - پس ن معلوم ہو سکتا ہے۔
اور مطلوبہ دائرہ وہ دائرہ ہے جو نقطوں ن اور ن میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خطوط میں سے کسی ایک کو مس کرتا ہے۔

نوٹ (۱) - چونکہ دو ایسے دائرے کھینچ سکتے ہیں: ن اور ن میں سے گزرتے ہیں اور دیے ہوئے خطوط میں سے ایک کو مس کرتے ہیں، اس لیے اس عملی مسئلہ کے دو حل ہیں۔
نوٹ (۲) - اس صورت پر غور کرو جبکہ دیے ہوئے خط متوازی ہوں۔

نوٹ (۳) - اگر دیا ہوا نقطہ ن منصف دم پر ہو تو عمل کی تشریح کرو۔

۳۔ مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ

(ج) کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ۱ اور ب میں سے گزرے۔



تخلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ت پر مس کرتا ہے - فرض کرو کہ ت پر ان دائروں کا مشترک مماس خط ا ب سے و پر ملتا ہے -

اب اگر د میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (ج) سے ف اور ق پر ملے تو $وق \times وق = وت^2 = وا \times وب$

پس معلوم ہوا کہ ا، ب، ف، ق مشترک محیط نقطے ہیں -
ترکیب - مندرجہ بالا تحلیل کی بنا پر مطلوبہ دائرہ کھینچنے کا عمل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے -

کوئی دائرہ کھینچو جو ا اور ب میں سے گزرے اور دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ف اور ق پر قطع کرے - ا ب اور ف ق کے نقطہ تقاطع د میں سے دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مماس وت کھینچو -

تب ا، ب، ت میں سے گزرنے والا دائرہ دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے -
طالب علم اس کا ثبوت خود بہم پہنچائے -

نوٹ (۱) - دس دائرہ (ج) کا ایک اور مماس وت بھی کھینچ سکتا ہے اس لیے ایک اور دائرہ ا ب ت بھی حاصل ہوتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے -
نوٹ (۲) - ظاہر ہے کہ اس عمل کا مل صرف اس صورت میں ممکن ہے جب کہ دیے ہوئے نقطے ۲ اور ب دونوں دائرہ (ج) کے اندر ہوں یا دونوں باہر - اگر ایک نقطہ اندر ہو اور دوسرا باہر تو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے -

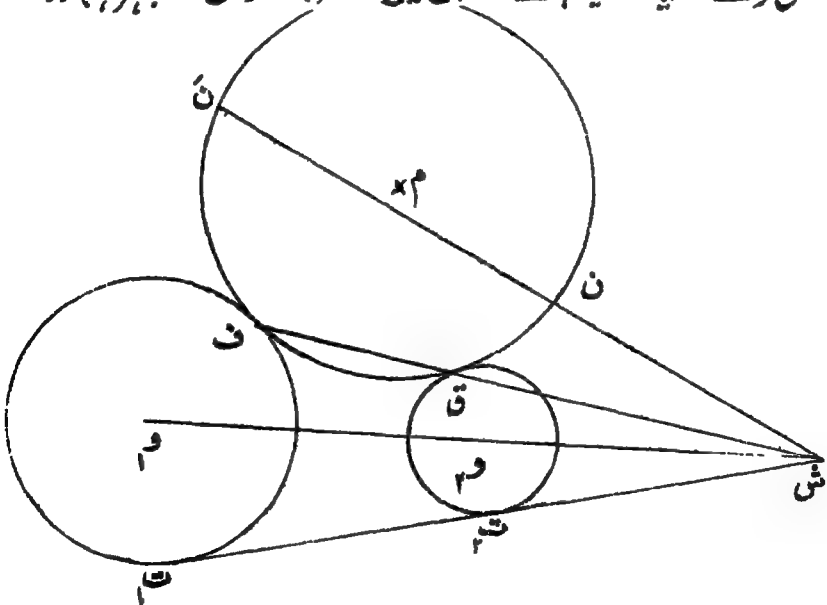
امثلہ ۱۹

(۱) ایک رُبع دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ۴ سمر ہے ایک دائرہ بناؤ -
اور اُس دائرہ کا نصف قطر محسوب کرو [جواب ۴ (۴۱-۱) لچ]

(۲) ایک دائرہ کھینچو جو حوالہ کے دونوں (علی القوائم) محوروں کو مس کرے اور نقطہ (۴، ۴) میں سے گزرے - بتاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں - ان دائروں کے

نصف قطر محسوب کرو۔ [جواب :- (۳ ± ۸۶) انچ]
 (۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک مثلث کے وہ ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔ دائرہ کے نصف قطر کا طول مثلث کے ضلع کے طول کی رقوم میں حاصل کرو۔ [جواب $\frac{۳۷-۱}{۴} \times ۱$]
 (۴) ۵ سم نصف قطر والے دائرے کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دسبے ہوئے دائرہ کو اور نیز باقی دو دائروں کو مس کرے۔ اگر ان تین دائروں میں سے ایک کا نصف قطر رسم ہو تو ثابت کرو کہ $[۱ + \text{قم } ۶۰] = ۵$
 (۵) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۶) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں (م) اور (ن) کو خارجاً مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے (جو دائروں کے باہر ہے) گزرے۔



[تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائروں کو

ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ خط ف ق مرکزوں کے خط و چ سے سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر ملتا ہے (دیکھو اختلاف مسئلہ سوال ۳)۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائروں کا ایک راست مشترک مماس ت ت ہے، یہ مماس سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے گزرتا ہے

۱ اور ش ف × ش ق = ش ت × ش ت (دیکھو اختلاف مسئلہ سوال ۴)

فرض کرو کہ ش ن مطلوبہ دائرہ سے مکرر ن پر ملتا ہے۔

تب ش ن × ش ن = ش ف × ش ق = ش ت × ش ت۔ اس لیے ن ت ت ت مشترک المحیط ہیں۔ اس بناء پر نقطہ ن معلوم ہو سکتا ہے، پس وہ دائرہ جو معلومہ نقطوں ن اور ن سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے دائروں میں سے کسی ایک کو غارجا میں آتا ہے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

(۷) سوال بالا کی مدد سے اب دائرہ کھینچو جو تین دیے ہوئے دائروں کو غارجا میں کرے۔

(۸) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے، ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوا، قطع کرے۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز ایک دیے ہوئے نقطہ پر ہو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے۔

پھٹا باب

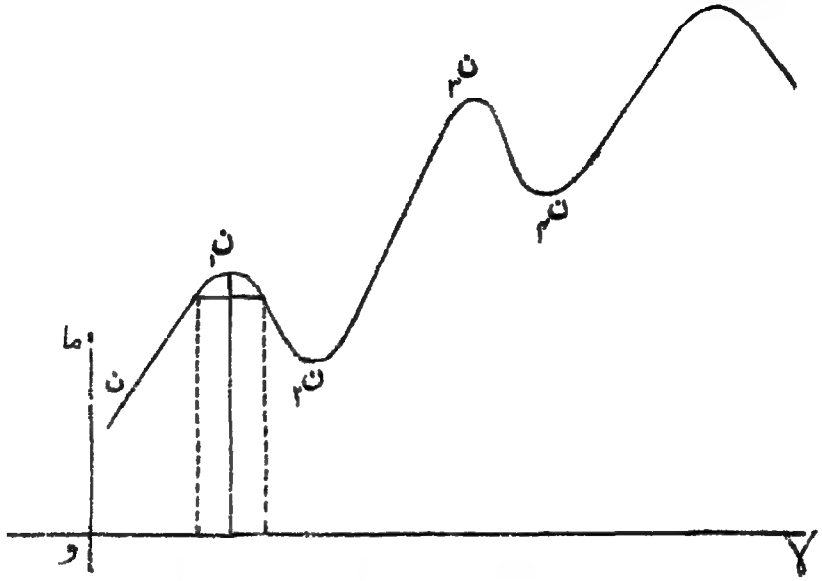
اعظم اقل

۴۔ جب کوئی ہندسی مقدار دیے ہوئے شرائط کے ماتحت مسلسل طور پر بدلتی ہے تو بعض اوقات یہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے کہ آیا اس تبدیلی کے دوران میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ مقدار بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتی ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتی ہے۔ اگر ایسے مقام ہوں تو اول الذکر نوعیت کے مقام کے لیے متغیر مقدار کی قیمت کو اعظم قیمت اور آخر الذکر نوعیت کے مقام کے لیے اس کی قیمت کو اقل قیمت کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر اگر کسی متغیر مقدار کے لیے کسی خاص مقام پر اعظم سے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اعظم قیمت بری ہوگی۔ اسی طرح اگر متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اقل سے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اقل قیمت چھوٹی ہوگی۔

نقطہ ن منحنی پر کہ کل میں معدن کے عین کی تبدیلی پر غور کرو جب کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کرے۔ مقدار ن۔ عین کا طول اعظم ہے۔ اس مقام پر عین کی قیمت قرب وجہ کی تمام قیمتوں سے بڑی ہے اور اسی طرح ن پر عین اعظم ہے۔ نیز ن اور ن پر عین اقل ہے۔

وضوح رہے کہ بالعموم اعظم قیمت سے مراد بڑی سے بڑی قیمت

نہیں ہوتی۔



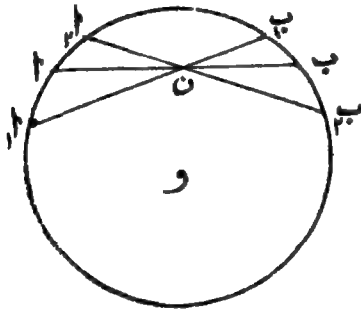
مثلاً شکل بالا میں ن پر معین اعظم ہے لیکن یہ قیمت معین کی قیمتوں میں سب سے بڑی نہیں ہے۔ اسی طرح اقل کے لیے۔

اس باب میں ہم صرف ایسی تبدیلیوں پر غور کریں گے جن میں متغیر مقدار صرف ایک مرتبہ اعظم یا اقل قیمت اختیار کرتی ہے۔ ایسی صورتوں میں اعظم قیمت درحقیقت بڑی سے بڑی قیمت ہے اور اقل قیمت چھوٹی سے چھوٹی۔
۵۔ بالعموم اعظم یا اقل قیمتوں کی تحقیق میں مندرجہ ذیل اشارے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

(۱) مقدار متغیر کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت ہوگی جو شکل بالا سے واضح ہے۔
علاً مقدار متغیر کی اعظم یا اقل قیمت یہ فرض کرنے سے دریافت کی جاتی ہے کہ اس مقام کے مخالف جانب قریب کے دو مقامات کے لیے متغیر مقدار کی قیمتیں مساوی ہیں اور بالآخر یہ مساوی قیمتیں اعظم یا اقل قیمت پر منطبق ہو جاتی ہیں۔

نوٹ - $\triangle = \frac{1}{4}$ ب ج جب ا میں ب، ج مستقل ہیں۔ اس لیے \triangle اعظم ہوگا جبکہ جب ا اعظم ہو۔
یعنی ا = ۹۰ اور اعظم رقبہ = $\frac{1}{4}$ ب ج

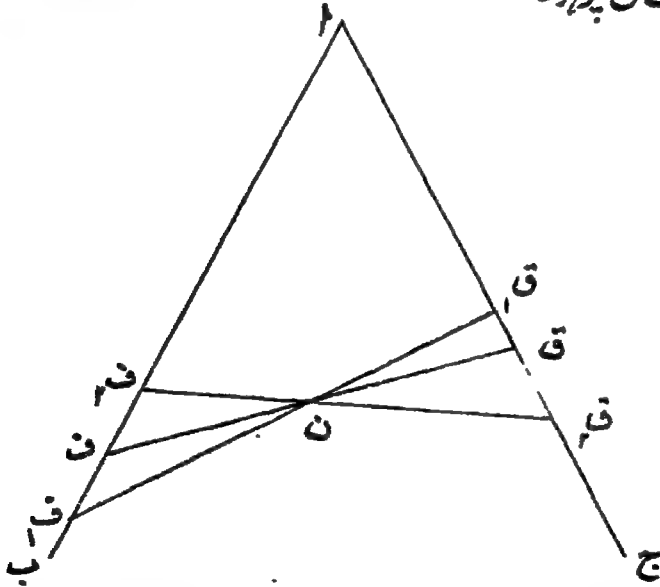
۷۷۔ مسئلہ - ایک دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر کے ایک نہایت نقطہ ن میں گزرنے والے تمام وتروں میں وہ وتر جس کی تنصیف نقطہ ن پر ہوتی ہے اقل ہے۔



فرض کرو کہ وتر ا ن ب کا طول اقل ہے۔
نیز فرض کرو کہ اس کے مخالف جانب دو قریب کے اور مساوی طول والے وتر ا ن ب، ا م ن ب م ہیں۔
چونکہ ا ب م = ا م ب م
اس لیے قطعہ ا ا م ب م کا رقبہ = قطعہ ا م ب م کا رقبہ
یعنی $\triangle ا ن ا م = \triangle ب ن ب م$
لیکن ان مثلثات کے مشترک رأس ن پر کے زاویے مساوی ہیں
اس لیے $ا ن ا م \times ب ن ب م = ب ن ب م \times ا ن ا م$
انہما میں نقاط ا اور ا م دونوں ا پر منطبق ہوتے ہیں اور ب اور ب م دونوں ب پر

اس لیے $n^2 = n \cdot b$ یعنی $n = 1$ $n \cdot b$ یعنی اقل وتر ab کی تنصیف دیے ہوئے نقطہ n پر ہوتی ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 مشق۔ شکل بالا میں ثابت کرو کہ وتر an b دائرہ سے اقل رقبہ والا قطعہ غیر اور اعظم رقبہ والا قطعہ کبیر قطع کرتا ہے۔

۷۸۔ دو متقاطع خطوط ab ، ac دیے گئے ہیں۔ اور $b > c$ اج کے اندر ایک ثابت نقطہ n ہے۔ اگر n میں سے گزرنے والا کوئی خط خطوط ab ، ac پر f اور q پر ملے تو مثلث fqn کا رقبہ اقل ہو گا جبکہ fqn کی تنصیف n پر ہو۔

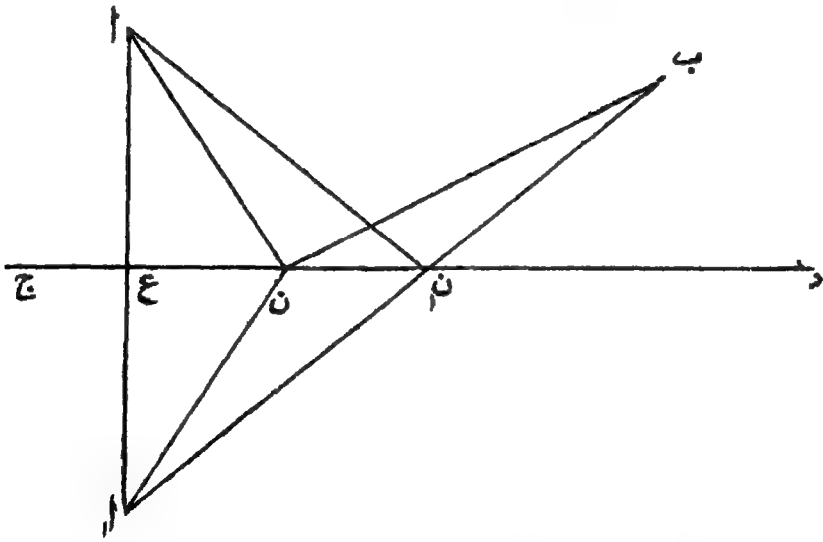


فرض کرو کہ \triangle $افق$ کا رقبہ اقل ہے۔ fqn کے مخالف جانب n میں سے گزرنے والے دو قریب کے خط fqn اور fqn $ق$ ایسے دو مثلث fqn کا رقبہ = مثلث fqn کا رقبہ
 جب مثلث fqn $ق$ = مثلث fqn $ق$ اور ان مثلثات کے مشترک راس n پر کے زاویے مساوی ہیں۔
 اس لیے $n \cdot f \cdot ق = ق \cdot n \cdot ق$ اور انہما میں جب

ف ق اور ف ق دونوں خط ق پر منطبق ہوتے ہیں تو
 ن ف = ن ق یعنی ن ف = ن ق - یہی ثابت کرنا تھا۔
 ۹۷ - ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے خالص ہندسی طریقوں
 کی تشریح کی جائیگی۔

مسئلہ۔ اگر ایک لائحہ خط ج د کی ایک ہی جانب کے
 دو ثابت نقطوں ا اور ب کو خط پر کے کسی نقطہ ن سے ملایا جائے تو
 ا ن اور ب ن کا مجموعہ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط دیے ہوئے خط ج د کے ساتھ
 مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بنائیں۔

۱ سے ج د پر عمود ا ع نکالو اور ا ع محدودہ پر نقطہ ا ایسا دو کہ ا ع = ج ا



ا ب کو ملاؤ جو ج د کو ن پر قطع کرے۔
 ج د پر کوئی نقطہ ن لے ا ن ب ن اور ا ن کو ملاؤ۔
 ثابت کرو کہ (۱) ا ن = ا ن

(۲) ا ن = ب ن + ا ب

(۳) ا ن ج = ب ن د

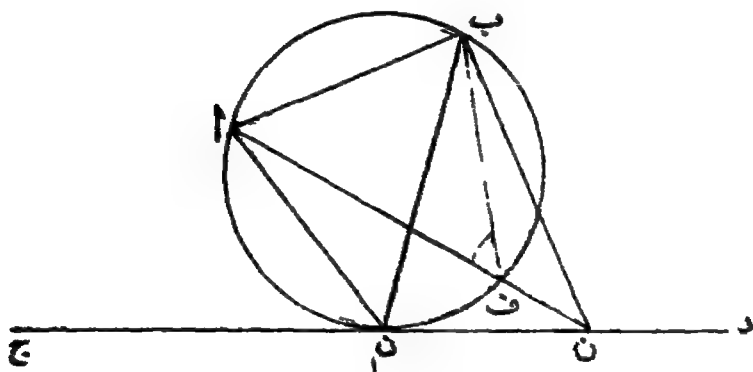
$$\dot{N}_1 = \dot{N}_2 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{ان} + \text{ن} = \text{ن} + \text{ن} < \text{پ}$$

(۶) نتائج (۲) اور (۵) سے ثابت کرو کہ $\angle \text{ان} + \text{بن} > \angle \text{ان} + \text{بن}$
مشق - اگر دیے ہوئے نقاط ا ب ثابت خط ج د کے مخالف جانب واقع ہوں اور ج د پر کوئی نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ $\angle \text{ان} + \text{بن} > \angle \text{ان} + \text{بن}$ جبکہ یہ خط دیے ہوئے خط ج د سے مساوی زاویے بنائیں۔

۸۰۔ مسئلہ۔ ایک لاکھ دو سو ثابت خط ج د کی ایک ہی جانب دو ثابت

نقطہ ۱ اور ب ہوں اور خط ج د پر کوئی مستحکم نقطہ نہ ہو تو \angle ان ب اعظم ہو جائیگا
 دائرہ ان ب دیے ہوئے خط ج د کو مس کرے۔



ایک دائرہ کھینچو جو اب میں سے گزرے اور ج دو کو مس کرے۔ فرض کرو کہ نقطہ تماس N ہے۔

ج د پر کونن بوسه نقد ن لو۔

ثابت کرنا ہے کہ $\text{ان ب بڑا ہے} > \text{ان بے}$

نہیں کرو کہ ان دائرو کو ف پر قطع کرتا ہے

ف ب کو لاؤ

\angle ان ب = \angle اف ب جو برابر ہے \angle ان ب سے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ۔ ۱۔ ب میں سے گزرنے والے اور خط ج د کو مس کرنے والے دو دائرے
 کھینچ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دوسرا دائرہ خط ج د کو ن پر مس کرتا ہے اس صورت
 میں بھی \angle ان ب اعظم ہوگا۔ پس \angle ان ب ن دو اعظم قیمتیں ہیں جو
 ن کے مقامات ن اور ن کے لیے حاصل ہوتی ہیں واضح ہو کہ بالعموم یہ دو قیمتیں
 مساوی نہ ہوں گی۔ اگر ب ۱، ج د سے لاپرٹے تو متحرک نقطہ ن کے مقام کا کہ یہ
 \angle ان ب کی قیمت صفر ہے، جو زاویہ ان ب کی اقل قیمت ہے۔
 پس ضمناً معلوم ہوا کہ دو اعظم قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اقل قیمت
 واقع ہوتی ہے۔

۸۱۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے چند ایسے مسائل درج کیے
 جاتے ہیں جو جبریہ متماثلات کی مدد سے آسانی حاصل ہوئے ہیں۔
مسئلہ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط اب پر کوئی نقطہ ن
 ہو تو \angle ان \times ن ب اعظم ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو اب کا۔

فرض کرو کہ \angle ان = لا اور \angle ن ب = ما
 از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو \angle لا ما = \angle (لا + ما) - \angle (لا - ما)
 ہمیں لا ما کی اعظم قیمت معلوم کرنا ہے اس صورت میں لا ما بھی اعظم ہوگا۔
 چونکہ اوپر کے تماثلہ میں \angle (لا + ما) مستقل ہے، اس لیے \angle لا ما اعظم ہوگا
 جبکہ \angle (لا - ما) (جو منفی نہیں ہو سکتا) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت یعنی صفر اختیار کرے۔
 یعنی جبکہ لا = ما

یعنی \angle ان = \angle ن ب یہی ثابت کرنا تھا۔
 ۸۲۔ **مسئلہ**۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط اب پر کوئی
 نقطہ ن ہو تو \angle ان + \angle ن ب اقل ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو اب کا۔
 فرض کرو کہ \angle ان = لا اور \angle ن ب = ما
 از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو۔

$$۲ (۱ + ۱) = (۱ + ۱) + (۱ - ۱)$$

بائیں جانب میں $(۱ + ۱)$ مستقل ہے اور $(۱ - ۱)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے اس لیے $۲ (۱ + ۱)$ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی جبکہ بائیں جانب کی دوسری رقم $(۱ - ۱)$ اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر اختیار کرے یعنی جبکہ $۱ = ۱$ یعنی $۱ = ۱$ جو ثابت کرنا تھا۔

مشکل ۲

(۱) ایک دیے ہوئے ثابت نقطہ سے ایک دیے ہوئے ثابت خط تک خطوط کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوط میں سے سب سے چھوٹا خط وہ ہے جو دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے محیط تک کھینچے ہوئے خطوط میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے خط ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا بڑے سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۴) مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۵) ایک مثلث کا قاعدہ اور اسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۶) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۷) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے وتر والا مستطیل مربع ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ ان سب مثلثوں میں جن کا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہیں مثلث

متساوی الساقین کا محیط اقل ہے۔

(۹) دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے پر علی التوائیں ہیں اور ایک سیدھی سلاح

ان کے درمیان پھسلتی ہے بتاؤ کہ پھسلنے والی سلاح کے کس مقام کے لیے پٹریوں اور

سلاح سے بننے والے مثلث کا رقبہ اعظم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلثوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

(۱۱) ایک پل کی تین کانیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا عرض ۵۰ فٹ ہے۔ بناؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارے پر وہ نقطہ ہے جہاں درمیانی کمان کے محاذی اعظم زاویہ بنتا ہے۔ [حزب ۵۰، ۱۲۵ فٹ]

(۱۲) ان تمام مثلثوں میں جو ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں مثلث مساوی الاضلاع کا محیط اعظم ہے۔

(۱۳) ان تمام مثلثوں میں جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پائین کا احاطہ اقل ہے۔

(۱۴) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں پر کا مجموعہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث مساوی الساقین ہو۔ (۱۵) ایک دائرہ کے باہر دو نقطے ۱ اور ۲ ہیں اور دائرہ پر کوئی نقطہ ۳ ہے ثابت کرو کہ ان + ب ن اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط ۳ پر کے تماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

(۱۶) مثال بالا کی دوسرے ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج (جس کے سب زاویے حاقہ ہیں) کے اندر ایک نقطہ ۱ ایسا معلوم کرو کہ ۱ + ب + ج اقل ہو۔ (۱۷) ایک ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں ضلعے بلحاظ طول اور ترتیب دیے گئے ہیں ثابت کرو کہ ذواربعتہ الاضلاع کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ ذواربعتہ الاضلاع مشترک المحيط ہو۔

سوال باب

پہلی نسبت، موسیقی صفت اور موسیقی نسل

۳۱۔ جدید علم ہندسہ میں ایک خط مستقیم پر طول کی پیمائش میں
 رسمت پیمائش کو بھی ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں
 کو مثبت قرار دیا جائے تو مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار
 دیا جائیگا۔ پس اگر خط پر ۱ اور ۲ دو نقطے ہوں تو $ا ب = - ب ا$
 اور $ب ا = ا ب$ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ $ا ب + ب ا = ۰$
 اگر ایک خط مستقیم پر تین نقطے ۱، ۲، ۳ ہوں تو

$$ا ب + ب ج = ا ج \quad \text{اور} \quad ا ب + ب ج + ج ا = ۰$$

نیز اگر دو نقطوں ۱ اور ۲ میں سے گزرنے والے خط پر کوئی نقطہ ہو تو

$$و ب - و ا = ا ب$$

ب ————— و ————— ا

و ————— ب ————— ا

و ————— ا ————— ب

۸۴۔ مسئلہ۔ اگر خط مستقیم کا وسطی نقطہ م ہو اور خط پر کوئی نقطہ د ہو تو $۲م = ۱ا + ۱ب$



ثبوت۔ چونکہ $ام = م ب$

اس لیے $۲م = ۱ا + ۱ب$

اس لیے $۲م = ۱ا + ۱ب$

۸۵۔ تعریف۔ متعدد ہم خط نقطوں کو نقطوں کی صف کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

$$۱ب \times ج د + ۱ب ج \times اد + ۱ج \times اد ب = ۰$$



$$۱ب \times ج د + ۱ب ج \times اد + ۱ج \times اد ب = ۰$$

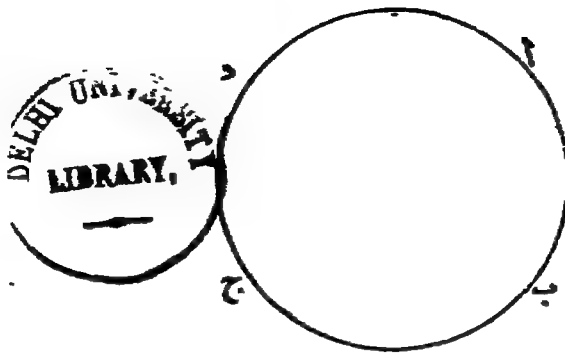
= $۱ب(اد - اج) + ۱ج(اب - اد) + ۱د(اج - اب) = ۰$
نوٹ۔ یہ مسئلہ درست رہیگا خواہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک خط پر کسی ترتیب میں لے جائیں۔

۸۶۔ تعریف۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

نسبت $\frac{۱ب \times ج د}{۱د \times ج ب}$ کو صف 'ا' ب ج د کی چلیبی نسبت کہتے ہیں

اور اس کی قیمت کو علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

نوٹ۔ صف 'ا ب ج د' کی چلیبی نسبت کو لکھنے اور یاد رکھنے کے لیے ایک دائرہ پر نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کو سلسلہ وار سمت ساعت میں لکھو شمار کنندہ حاصل کرنے کے لیے 'ا' سے شروع کر کے حروف کو سمت ساعت میں لکھو



اور نسب نما حاصل کرنے کے لیے اسے شروع کر کے حروف کو خلاف سمت رامت میں لکھو۔

۸۷۔ مسئلہ۔ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج ع) تو نقاط د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے۔

چونکہ (ا ب ج د) = (ا ب ج ع)

$$\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج ع}{ا ع \times ج ب}$$

$$\frac{ج د}{ا د} = \frac{ج ع}{ا ع} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{ج د}{د} = \frac{ج ع}{ع} \quad \text{یعنی}$$

یعنی ج ا کی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط د اور ع پر ہوتی ہے اس لیے نہ دہری ہے کہ د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں۔

امثالہ ۱۱

(۱۱) ا ب کا وسطی نقط ج ہے اور ا ب پر کوئی اور نقطہ نہ ہے

نسبت دہری

$$(۱) \text{ ان } \times \text{ بن } + \text{ ج } \text{ ب }^{\circ} = \text{ ج } \text{ ن}^{\circ}$$

$$(ب) \text{ ا } \text{ ب }^{\circ} + \text{ ب } \text{ ن}^{\circ} = \text{ ا } \text{ ج }^{\circ} + \text{ ج } \text{ ن}^{\circ}$$

(۲) اب کا وسطی نقطہ ج ہے اور اب محدودہ پر کوئی نقطہ د ہے

$$\text{ثابت کرو کہ } \text{ ا } \text{ ج } \times \text{ ا } \text{ د} = \text{ ج } \text{ ب } \times \text{ ب } \text{ د} + \text{ ب } \text{ ج}^{\circ}$$

(۳) 'ا' 'ب' 'ج' 'ن' کوئی چارہم خط نقطہ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن } \times \text{ ا } \text{ ب } \text{ ج} + \text{ ن } \text{ ب }^{\circ} \times \text{ ا } \text{ ج} + \text{ ن } \text{ ج}^{\circ} \times \text{ ا } \text{ ب} + \text{ ب } \text{ ج} \times \text{ ج } \times \text{ ا } \text{ ب} = ۰$$

(۴) اگر (ا ب ج د) = لہ، تو

ثابت کرو کہ (ا ب ج د) کی قیمت نہیں بدلتی جبکہ کسی دو حروف کو باہم بدلا جائے اور ساتھ ہی باقی دو حروف کو بھی باہم بدلا جائے یعنی

$$(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا) = لہ$$

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا دوسرے

اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت الٹ جاتی ہے یعنی

$$(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج) = \frac{1}{لہ}$$

(۶) ثابت کرو کہ دوسرے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا پہلے

اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت ۱- لہ ہو جاتی ہے یعنی

$$(ا ج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا) = ۱- لہ$$

اشارہ۔ چونکہ $\text{ا } \text{ ب} \times \text{ ج } \text{ د} + \text{ ب } \text{ ج} \times \text{ ا } \text{ د} + \text{ ج } \text{ د} \times \text{ ا } \text{ ب} = ۰$

$$\text{اس لیے } ۰ = \frac{\text{ا } \text{ ب} \times \text{ ج } \text{ د}}{\text{ا } \text{ د} \times \text{ ج } \text{ ب}} + ۱ - \frac{\text{ج } \text{ ا} \times \text{ ب } \text{ د}}{\text{ا } \text{ د} \times \text{ ج } \text{ ب}}$$

$$\text{اس لیے } ۱- لہ = \frac{\text{ج } \text{ ا} \times \text{ ب } \text{ د}}{\text{ا } \text{ د} \times \text{ ج } \text{ ب}} = \frac{\text{ا } \text{ ج} \times \text{ ب } \text{ د}}{\text{ا } \text{ د} \times \text{ ج } \text{ ب}} = (ا ج ب د)$$

اسی طرح سے باقی کی تین چلیپی نسبتوں کے لیے بھی۔

(۷) ثابت کرو کہ

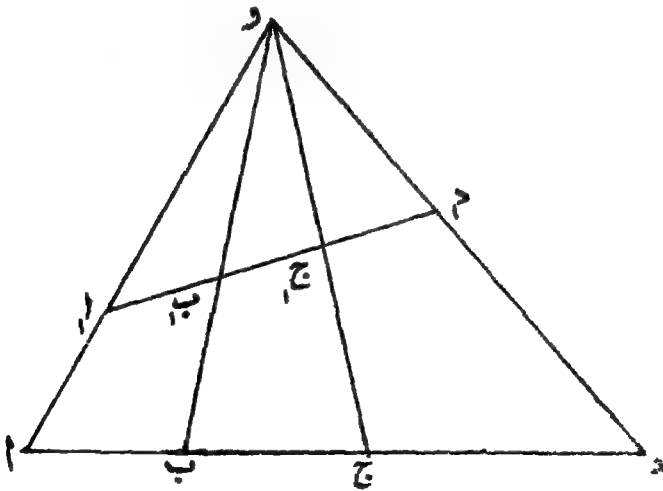
$$(۱) (ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج ب د ا) = (د ا ب ج) = \frac{1}{۱- لہ}$$

$$(ب) (ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب) = ۱- \frac{1}{۱- لہ} = \frac{لہ}{۱- لہ}$$

(ج) (ا ج د ب) = (ب د ج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج) = $\frac{ل-ا}{ل}$
 (۸) ثابت کرو کہ چار ہم خط نقطوں ا، ب، ج، د کو مختلف ترتیبوں میں
 لینے سے ۲۴ چلیبی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار چار مساوی القیمت چلیبی نسبتوں کے
 چھ سٹ (ست) بنتے ہیں۔

۸۸ - تعریفیات - متعدد متراکز خطوں کو خطوں کی پنسل کہتے ہیں۔
 اور پنسل کے ہر خط کو شعاع کہتے ہیں اور پنسل کی شعاعوں کے نقطہ تراکز کو پنسل کا رأس
 کہتے ہیں۔

پنسل کی شعاعوں کو کاٹنے والے کسی خط کو پنسل کا قاطع کہتے ہیں۔
 مسئلہ - اگر چار شعاعوں د ا، د ب، د ج، د د سے بننے والی ایک پنسل کو
 دو قاطع بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د اور ا، ب، ج، د پر قطع کریں تو (ا ب ج د) = (ا ب ا ج د)۔



$$\frac{\Delta ا ب د \times \Delta ج و د}{\Delta ج و ب \times \Delta ا و د} = \frac{ا ب \times ج د}{ا ج \times د ب} = (ا ب ج د)$$

$$\frac{\frac{1}{ا} \times ا و د \times ج ب ا و ب \times ج ب ا و ب \times ج ب ج و د}{\frac{1}{ج} \times ج و د \times ج ب ا و د \times ج ب ا و ب \times ج ب ج و د} =$$

جہاں زاوواں کا علامہ ا، ب، ج، د کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} =$$

$$\text{اسی طرح سے (ا ب ج د)} = \frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}}$$

چونکہ پنل کے قاطعوں کے تمام مقامات کے لیے

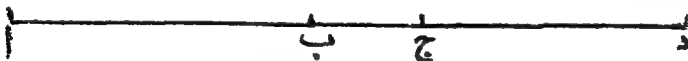
$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} = \frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}}$$

اس لیے ثابت کرو کہ (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

نوٹ (۱) - یہ طریقہ اُن صورتوں پر بھی حاوی ہے جبکہ قاطع پنل کی ایک یا ایک سے زیادہ محدود شعاعوں کو قطع کرے۔ قاطع کے مختلف مقامات کے لیے طالب علم مناسب شکلیں کھینچ کر ثبوت ہم پہنچائے۔

نوٹ (۲) - مسئلہ بالا میں یہ ثابت ہوا کہ اگر چار شعاعوں داوب، وج، ود سے بننے والی پنل کو کوئی قاطع نقاط ا ب، ج، د پر قطع کرے تو صنف ا ب ج د کی چلیبی نسبت قاطع کے مقام پر منحصر نہیں ہے بلکہ پنل کی شعاعوں کے درمیانی زاویوں پر منحصر ہے۔ اس متقل چلیبی نسبت کو پنل کی چلیبی نسبت کہتے ہیں اور اسے علامت د (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

۸۹۔ تعریفات - اگر ایک خط مستقیم ا ج کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت میں ب اور د پر کی جائے [یعنی اگر $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{د ج}{ج د}$] تو یوں کہا جاتا ہے کہ



ا ج کی موسیقی تقسیم ب اور د پر ہوئی ہے (دیکھو دفعہ ۲۱) اور صنف ا ب ج د کو موسیقی صنف کہتے ہیں نیز نقاط ا اور ج کے لحاظ سے نقاط ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی جزو دوج کہلاتے ہیں

$$\text{موسیقی صنف ا ب ج د کی چلیبی نسبت} = \frac{ا ب \times ج د}{ب ج \times ج د}$$

$$= \frac{ا ب}{ب ج} \div \frac{د ج}{ج د} = ۱ -$$

پس صف اب ج د موسیقی صف ہوگی اگر اُس کی چلیپی نسبت (اب ج د) = ۱-
یعنی یہ صف جس کی چلیپی نسبت ۱- کے مساوی ہے موسیقی صف ہے۔
یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ ۱ اور ج کے لحاظ سے ب اور د ایک دوسرے کے
موسیقی مزدوج ہیں موسیقی صف اب ج د کو (اج، ب د) = ۱- سے بھی تعبیر
کرتے ہیں۔

۹۰۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = ۱- تو (د ب، ج ا) = ۱-

د ج ب ا

از روئے تعریف $\frac{اب}{بج} = \frac{اد}{دج}$

اس لیے تبدیل نسبت سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{دج}{بج} = \frac{اد}{اب}$$

$$\frac{دج}{ج ب} = \frac{اد}{ب ا} \quad \text{یعنی}$$

یعنی (د ب، ج ا) = ۱-

۹۱۔ مسئلہ۔ اگر (اب ج د) = ۱- تو اب، اج، اد کے طول موسیقی
سلسلہ میں ہوں گے۔

چونکہ (اب ج د) = ۱-

$$\frac{اب \times ج د}{ج \times ب ا} = ۱-$$

$$\frac{اب (اد - اج)}{اد (اب - ج ا)} = ۱- \quad \text{یعنی}$$

یعنی $اب \times اد - اب \times اج = اد \times اب - اد \times اج$
طرفین کو اب $\times اج \times اد$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{۱}{اج} - \frac{۱}{اد} = \frac{۱}{اد} + \frac{۱}{اج} - \frac{۱}{اب}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{ا} - \frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} - \frac{1}{ب}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{ا}، \frac{1}{ج}، \frac{1}{ب} \text{ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔}$$

یعنی طول ا، ج، ب موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اگر (ا، ج، ب) = ۱ - اور ب کا وسطی نقطہ
و ہو تو وا × وج = وب



چونکہ (ا، ج، ب) = ۱ -

$$\text{اس لیے } \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ج} - ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{ود - وا}{وج - ود}$$

$$\text{یعنی } \frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وج + وب} \text{ کیونکہ } ود = -وب$$

$$\text{یعنی } \frac{وج + وب}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وب - وا} \text{ (تبدیل نسبت)}$$

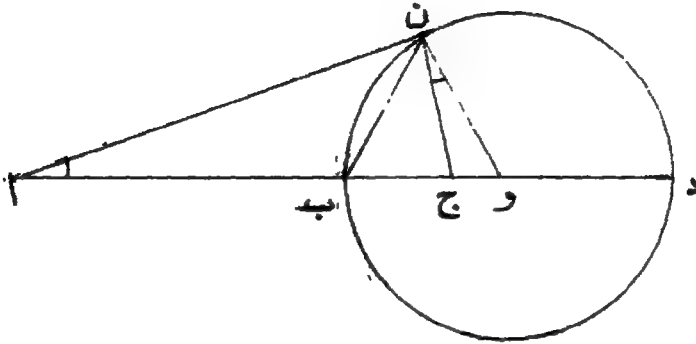
$$\text{یعنی } \frac{وج}{وب} = \frac{وب}{وا} \text{ (ترکیب و تفصیل نسبت)}$$

$$\text{یعنی } وا \times وج = وب$$

۹۳۔ مسئلہ۔ اگر (ا، ج، ب) = ۱ - اور قطر ب د پر

$$\text{کھینچے ہوئے دائرہ پر کوئی نقطہ ہو تو } \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ج}$$

فرض کرو کہ ب د کا وسطی نقطہ دے
ن ا' ن ب' ن ج' ن د کو ملاؤ



سابقہ مسئلہ کی رو سے

$$ا د \times و ج = و ب$$

$$و ن =$$

یعنی و ن ماس ہے \triangle ا ن ج کے حائل دائرہ کا

$$(۱) \dots\dots\dots ا ب > و ن ج = ا ن ب \dots\dots\dots$$

چونکہ و ب = و ن

$$اس لیے و ن ب = و ب > و ن ج$$

$$(۲) \dots\dots\dots ا ب > و ن ج + ج ن ب = ا ن ب + ا ب > ا ن ب \dots\dots\dots$$

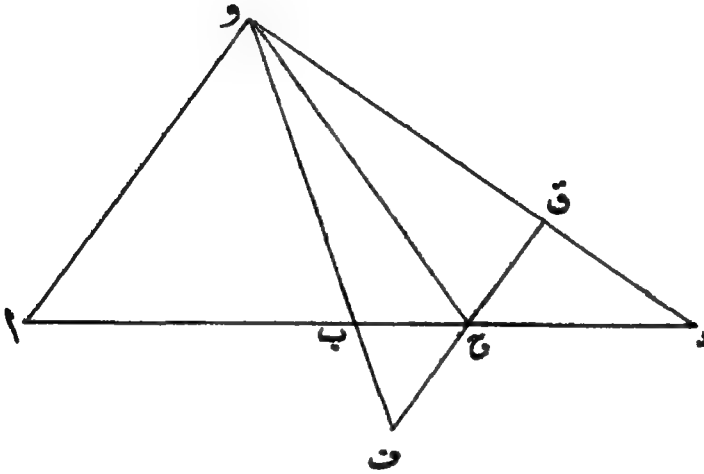
(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$ا ن ب > ج ن ب = ا ن ب$$

یعنی ن ب داخلی منصف ہے \triangle ا ن ج کا

$$اس لیے \frac{ا ن}{ج ن} = \frac{ا ب}{ب ج} \text{ یہی ثابت کرنا تھا۔}$$

۹۴۔ مسئلہ۔ اب ج د ایک موسیقی صنف ہے، اس کے باہر کوئی نقطہ ہے۔ اگر ج میں سے ایک خط ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچا جائے جو ب سے ف پر اور و سے ق پر ملے تو ف ج = ج ق۔



متشابه مثلثوں اب و اور ج ب ف میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا د}{ف ج} = \frac{اب}{ب ج}$$

نیز متشابه مثلثوں ا د و اور ج د ق میں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ا و}{ج ق} = \frac{ا د}{ج د}$$

لیکن چونکہ اب ج د موسیقی صنف ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ا د}{ج د} = \frac{اب}{ب ج}$$

نتائج (۱) (۲) (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

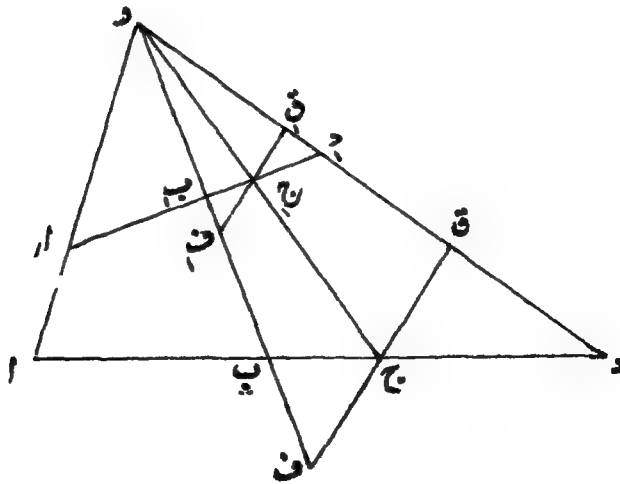
$$\frac{ا}{ج} = \frac{د}{ق}$$

$$\frac{ا}{ج} = \frac{د}{ق}$$

اس لیے ف ج = ج ق
عکس۔ اگر ا ب ج د ایک صفت ہو اور اس کے باہر ایک نقطہ د ہو اور ج سے د کے متوازی ایک خط ف ج ق کھینچا جائے جو ب کے ف پر اور د سے ق پر ملے اور اگر ف ج = ج ق تو ا ب ج د ایک موسیقی صفت ہوگی۔
اس مسئلہ کا ثبوت اوپر کے مسئلہ کے ثبوت کے استدلال کو اٹھنے سے طالب علم خود حاصل کرے۔

۹۵۔ مسئلہ۔ اگر ا ب ج د ایک موسیقی صفت ہو اور اس کے

باہر کوئی نقطہ د ہو تو د ا، د ب، د ج، د د ہر قاطع کو ایک موسیقی صفت پر قطع کر دیتے۔



فرض کرو کہ کوئی دوسرا قاطع خطوط د ا، ب، ج، د کو بالترتیب
نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔
نقاط ج اور ج میں سے خطوط ف ج ق اور ف ج ق
خط د کے متوازی کیمنچو۔
چونکہ (ا ب ج د) ایک موسیقی صنف ہے اس لیے ف ج = ج ق
اس لیے ف ج = ج ق کے مسئلہ کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب ج د
ایک موسیقی صنف ہے۔

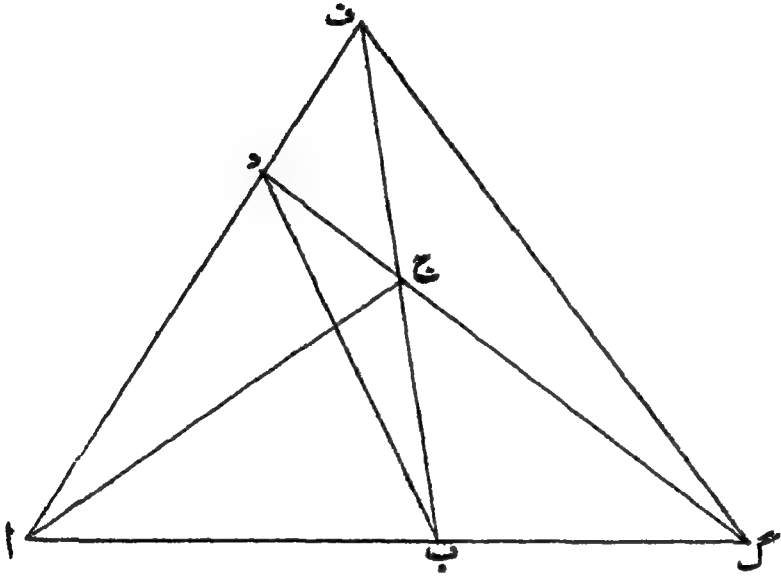
تعریفات۔ اگر پنسل د (ا ب ج د) ایسی ہو کہ اُس کے ایک مخصوص
قاطع (اور اس لیے مسئلہ بالا کی رو سے اس کے ہر قاطع پر) ایک موسیقی صنف
حاصل ہوتی ہو تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں۔ اور شعاعوں ب، د کو بمعاظ
شعاعوں ا، ج کے ایک دوسرے کی موسیقی ہر دو ج شعاعیں کہتے ہیں۔
نوٹ (۱)۔ گزشتہ ترقیم کے اصول پر موسیقی پنسل د (ا ب ج د) کو
اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

د (ا ب ج د) = ۱ - ۱ یا د (ا ج ب د) = ۱ - ۱
نوٹ (۲)۔ دفعہ ۸ کے مسئلہ کی رو سے (ا ب ج د) = (ا ب ج د)
اور چونکہ حسب مفروض (ا ب ج د) = ۱ - ۱ اس لیے ثابت ہوا کہ (ا ب ج د) = ۱ - ۱
یہ مسئلہ بالا کا متبادل ثبوت ہے۔

تعریفات۔ ایسے چار خطوط متعقیم کے نظام کو جن میں سے کوئی تین
مترکز نہیں ہیں، مکمل ذواربۃ الاضلاع کہتے ہیں۔
یہ چار خطوط مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعے کہلاتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعے ا ب، ج، د، ا ہیں۔
تیز فرض کرو کہ ا ب اور ج د کا نقطہ تقاطع گ ہے اور ا د اور ب ج کا
نقطہ تقاطع ف ہے۔ پس مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعوں میں سے دو، دو کے
تقاطع سے چھ نقطے ا، ب، ج، د، ف، گ حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو

کمل ذواربۃ الاضلاع کے چھ رؤس کہتے ہیں -



مقابل کے رؤسوں کو ملانے والے تین خطوط یعنی 'اج'، 'ب' د اور 'ف' گ کو
کمل ذواربۃ الاضلاع کے تین قطر کہتے ہیں -

۹۷۔ مسئلہ - کمل ذواربۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر

کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں -

دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق کمل ذواربۃ الاضلاع کے قطر 'اج'، 'ب' د
اور 'ف' گ ہیں -

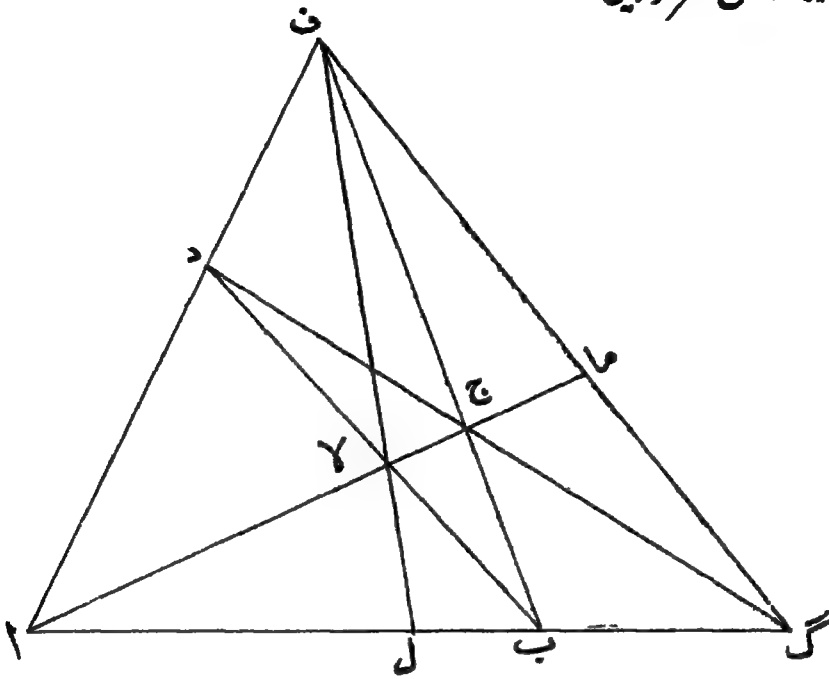
فرض کرو کہ قطر 'اج' کو دوسرے دو قطرب 'د اور 'ف' گ بالترتیب
نقاط لا اور ما پر قطع کرتے ہیں -

ثابت کرنا ہے کہ 'ا' لا 'ج' ما موسیقی صفا ہے -

فرض کرو کہ 'ف' لا اور 'ب' کا نقطہ تقاطع 'ل' ہے -

مثلاً 'ف' 'ب' کے رؤسوں سے گزرنے والے خط 'اج'، 'ب' د

اور فل متراکز ہیں۔



اس لیے سیوا کے مسئلے

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ + = \frac{\text{ف د}}{\text{ا د}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}}$$

نیز مثلث ف ا ب کے ضلعوں پر کے تین نقطے گ، ج، د ہم خط ہیں۔
اس لیے میدنی لاس کے مسئلے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ - = \frac{\text{ف د}}{\text{ا د}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}}$$

نتائج (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}}$$

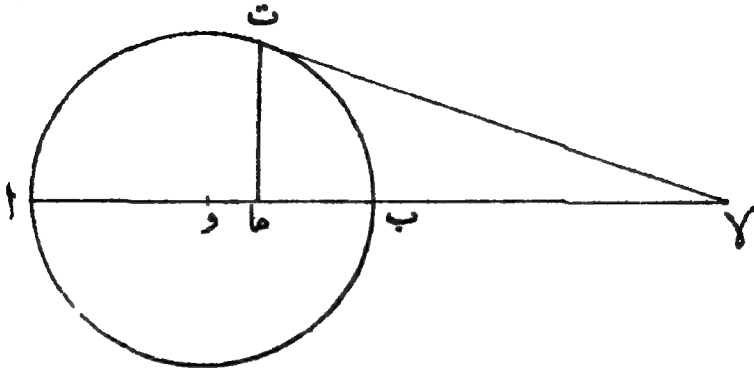
یعنی ا ل ب گ موسیقی صفت ہے

اس لیے پزل ف (ا ب گ) موسیقی پزل ہے۔
 اس لیے اس پزل کے قاطع ا ما پر موسیقی صفا ا لا ج ما حاصل ہوتی ہے
 پس ثابت ہوا کہ مکمل ذواربجۃ الاضلاع کے قطر ب د اور ف گ تیسرے قطر
 ا ج کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
 اسی طرح گے دوسرے دو قطروں ب د اور ف گ کے لیے بھی مسئلہ
 ثابت ہو سکتا ہے۔

مشکل ۲۲

(۱) خط ا ب کا وسطی نقطہ لا ہے، ا اور ب کے لحاظ سے نقطہ لا کا
 موسیقی مزدوج کہاں ہے؟
 (۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے منصف ا کا اور ا ما ہیں۔
 ثابت کرو کہ ا (ب لا ج ما) موسیقی پزل ہے۔
 (۳) مثلث ا ب ج کے جانب دائرہ کا ایک طرف ق ضلع ب ج
 پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا (ق ب ف ج) موسیقی پزل ہے۔
 (۴) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں ج د نفی خط ہے جو ا ب کے
 متوازی نہیں ہے ج د پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ $\angle ا ن ب$ کا
 ایک منصف خط ج د ہو۔

(۵) ا ب ج یک مثلث ہے اور ن ایک ثابت نقطہ ہے جو
 مثلث کے اضلاع پر نہیں ہے۔ ن میں سے ایک خط کھینچو جو مثلث کے اضلاع
 ا ب، ب ج، ج ا سے ایسے نقاط ف، ق، سر پر لے کہ (ن ف ق سر) = ۱۔
 (۶) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب د کے متوازی ا ح
 کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ا ب د، ج ع، ۱۔
 (۷) ایک دائرہ کے قطر ا ب عمود پر کے کسی نقطہ لا سے دائرہ کا
 ایک یا سلاٹ کھینچا گیا ہے اور ت سے ا ب پر عمود ت ما ہے۔



ثابت کرو کہ لا ا اور لا ب کا حسابی اوسط لا و ہے، ہندسی اوسط لا ت ہے اور موسیقی اوسط لا ح ہے۔

(۸) شکل بالا میں ثابت کرو کہ (ا ب، ما لا) = ا -

(۹) شکل بالا میں اگر لا سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ د سے

ف اور ق پر اور ت ما سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ لا ف ن ق موسیقی صفت ہے۔

(۱۰) دو دائرے (د) اور (د) ایک دوسرے کو عمود وار قطع

کرتے ہیں۔ اگر دائرہ (د) کا کوئی قطر ا ب دائرہ (د) سے ف اور ق

پر ملے تو ثابت کرو کہ (ا ب، ف ق) = ا -

(۱۱) د (ا ب ج د) موسیقی پٹیل ہے۔ اگر > ا و ج قائمہ ہو تو

دفعہ ۹۳ کی مدد سے ثابت کرو کہ > ب و د کے منصف و ا، و ج

ہیں۔ [مقابلہ کرو دفعہ ۹۳ کے ساتھ]

(۱۲) ایک خط پر تین نقطے (ا، ب، ج دیے گئے ہیں صرف پٹری کو

استعمال کرنے سے دفعہ ۹۴ کی مدد سے اسی خط پر نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ

(ا ب ج د) = ا -

(۱۳) (ا، و ب، د ج تین دیے ہوئے خط ہیں۔ خط و د

ایسا کھینچ کر و (ا ب ج د) = ۱ -
 (۱۳) دو دائرے ایک دوسرے کو ب اور ج پر قطع کرتے ہیں اور
 ان دائروں کا ایک مشترک تماس دائروں کو ف اور ق پر مس کرتا ہے ب اور ج
 میں سے گزرنے والا کوئی دائرہ خط ف ق سے ل اور م پر ملتا ہے
 ثابت کرو کہ (ف ق ' ل م) = ۱ -

۲

۱

۱

اعلاط ناما

علم ہندسہ مستوی

صحیح	غلط	نمبر	نمبر	صحیح	غلط	نمبر	نمبر
راس	طاس	۱۲	۶۲	سکتی	سکتی	۸	۷
(ب + ج)	(ب + ج)	۱۰	۶۶	درسی	درسی	۲۰	۸
ر	ر	۲۵	۸۳	ہندسہ مستوی	ہندسہ مستوی	پیشانی	۱۲
تقلیب	آقلیب	۱۳	۹۳	۷۵	۷۵	۱۰	۳۱
نقطہ	لفظ	۱۶	۹۷	ج	ج	شکل	۳۵
(ق)	(ق)	۶	۱۰۲	قسم	قسم	۱۲	۳۹
خطوط	خطوط	۹	۱۰۹	تناظر	تناظر	۲۰	۳۹
مس	مس	۹	۱۱۱	ب	ب	۳	۴۹
مقدار	مقدار	۱۰	۱۱۳	د	د	۲	۷
حادثہ	حادثہ	۱۶	۱۲۲	ع	ع	شکل	۵۳
رأس	رأس	۶	۱۲۷	س	س	۲	۶۰
ج	ج	۱۳۳	۱۳۳	شکل میں خط اد واضح نہیں ہے	شکل میں خط اد واضح نہیں ہے	شکل	۶۱
(د)	(د)	۱۶	۱۳۴	د	د	۵	۶۲

